

## 2.11 Zrýchlenie pri rovnomernom pohybe po kružnici

### Zopakujte si

1. Aký smer má okamžitá rýchlosť a okamžité zrýchlenie krivočiareho pohybu?
2. Čo je tangenciálne a normálové zrýchlenie?
3. Aký je vzťah medzi veľkosťou rýchlosti a uhlovej rýchlosti pohybu po kružnici.



Pri rovnomernom pohybe po kružnici veľkosť obvodovej rýchlosti a veľkosť uhlovej rýchlosti nezávisí od času

$$|\mathbf{v}| = v = \text{konšt.}, \quad \Delta v = 0, \quad \text{a} \quad |\boldsymbol{\omega}| = \omega = \text{konšt.}, \quad \Delta \omega = 0.$$

Uhlová rýchlosť  $\boldsymbol{\omega}$  pritom nemení svoj smer, na rozdiel od rýchlosti  $\mathbf{v}$ , ktorá je v prípade pohybu po kružnici vždy kolmá na polohový vektor  $\mathbf{r}$  hmotného bodu. Preto

$$\mathbf{v} \neq \text{konšt.}$$

Na obr. 64 vidieť, že pri rovnomernom pohybe po kružnici, zmenu rýchlosti z  $\mathbf{v}$  na  $\mathbf{v}'$  za čas  $\Delta t$  vyjadruje nenulový vektor  $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}' - \mathbf{v}$ . Ide preto o pohyb so zrýchlením. Ukážeme si, akú veľkosť a smer má toto zrýchlenie pre veľmi malý čas  $\Delta t$ , t.j. **okamžité zrýchlenie**

$$\mathbf{a} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}, \quad \text{pre } \Delta t \rightarrow 0.$$

Keď sa bod B približuje k bodu A, vektorová priamka vektora  $\Delta \mathbf{v}$ , a tým aj vektora  $\mathbf{a}$ , sa približuje k priamke prechádzajúcej bodmi A, S. Pre  $\Delta t \rightarrow 0$  zrýchlenie  $\mathbf{a}$  smeruje presne do stredu S trajektórie.

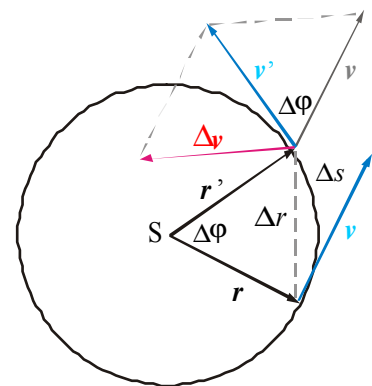
Okamžité zrýchlenie  $\mathbf{a}$  rovnomerného pohybu po kružnici je spôsobené zmenou smeru rýchlosti a smeruje v každom bode trajektórie do jej stredu. Nazývame ho **dostredivé zrýchlenie** (obr. 65)

Keď je bod B veľmi blízko bodu A, môžeme dĺžku úsečky  $AB = |\Delta \mathbf{r}|$  nahradiť dráhou  $\Delta s$ . Pritom uhol  $\Delta \varphi$  opísaný sprievodičom je rovnako veľký, ako uhol zovretý pôvodným a konečným smerom rýchlosti. Veľkosť dostredivého zrýchlenia

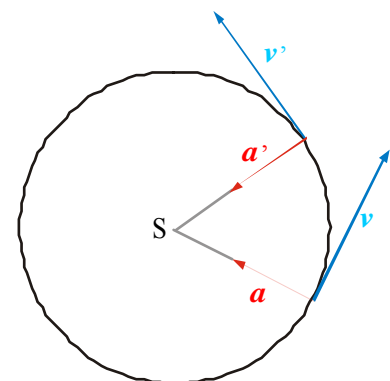
$$a_d = |\mathbf{a}| = \frac{|\Delta \mathbf{v}|}{\Delta t}$$

určíme podľa obr. 64 z podobnosti trojuholníkov SAB a BCD. Vyplyva z nej vzťah

$$\frac{\Delta s}{r} = \frac{|\Delta \mathbf{v}|}{v}$$



Obr. 64 Zmena smeru rýchlosti spôsobuje zrýchlenie



Obr. 65 Dostredivé zrýchlenie smeruje do stredu S kružnice

do ktorého dosadíme  $\Delta s = v\Delta t$ , alebo  $\Delta s = (r\omega)\Delta t$ .

Vyjadrením podielu  $\frac{|\Delta v|}{\Delta t}$  potom zistíme, že pre **veľkosť dostredivého zrýchlenia** rovnomerného pohybu po kružnici platia vzťahy

$$a_d = \frac{v^2}{r} \qquad a_d = r\omega^2$$

### Príklad

Automobil sa pohybuje v zákrute s polomerom 100 m, stálou rýchlosťou 90 km.h<sup>-1</sup>. Vypočítajte veľkosť dostredivého zrýchlenia a uhlovej rýchlosti ťažiska auta.

Riešenie  $r = 100 \text{ m}$ ,  $v = 90 \text{ km.h}^{-1}$ ,  $a_d = ? \text{ m.s}^{-2}$ ,  $\omega = ? \text{ rad.s}^{-1}$ .

$$a_d = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(90 \frac{10^3 \text{ m}}{3,6 \cdot 10^3 \text{ s}}\right)^2}{100 \text{ m}} = 6,25 \text{ m.s}^{-2},$$

$$v = r\omega \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{v}{r}} = \sqrt{\frac{10^2 \text{ m.s}^{-1}}{10^2 \text{ m}}} = 1 \text{ s}^{-1} = 1 \text{ rad.s}^{-1}$$

Rovnomerný pohyb po kružnici sa vyznačuje stálou veľkosťou rýchlosti. Z toho plynie, že okamžité zrýchlenie  $a$  takéhoto pohybu má nulovú tangenciálnu zložku  $a_t$ . Preto  $a = a_n$  smeruje do stredu trajektórie, je dostredivým zrýchlením.

Veľmi často sa stretávame aj so zrýchleným, alebo spomaleným pohybom po kružnici. Príkladom môže byť pohyb bodov na obvodě rozbiehajúceho sa, alebo brzdiaceho auta. V takom prípade sa veľkosť rýchlosti aj uhlovej rýchlosti mení a zrýchlenie má nenulovú tangenciálnu zložku. V dôsledku toho sa mení aj veľkosť normálovej zložky zrýchlenia.

### Otázky a úlohy

1. Aká podmienka pre *rýchlosť* a *uhlovú rýchlosť* musí byť splnená, aby pohyb po kružnici bol rovnomerný?
2. Nakreslite *vektor zmeny rýchlosti* za čas  $\Delta t$  pre rovnomerný pohyb po kružnici. Zdôvodnite, prečo jeho veľkosť nie je nulová?
3. Zdôvodnite, prečo *zrýchlenie rovnomerného pohybu po kružnici* nie je nulové?
4. Dokážte, že *okamžité zrýchlenie rovnomerného pohybu po kružnici* smeruje do stredu trajektórie.
5. Ktorými vzťahmi je daná *veľkosť dostredivého zrýchlenia*?
6. Odvodte vzťahy medzi veľkosťou dostredivého zrýchlenia rovnomerného pohybu po kružnici a veľkosťou jeho a) rýchlosti, b) uhlovej rýchlosti.
7. Vypočítajte veľkosť dostredivého zrýchlenia bodu na obvodě kola s polomerom 10 cm, ktoré sa otáča so stálou frekvenciou 10 Hz.
8. Naočrtnite graf znázorňujúci závislosť dostredivého zrýchlenia od uhlovej rýchlosti.