

Projekt KEGA

Vyučovanie fyziky programovaním modelov fyzikálnych javov
a pomocou interaktívneho softvéru

Poodhalenie tajomstva kvantovej mechaniky



Cvičebnica

Edwin F. Taylor

Košice 2008

Autor prekladu: RNDr. Jozef Hanč, PhD.
Odborná revízia prekladu: RNDr. Slavomír Tuleja, PhD.

Edwin F. Taylor, Poodhalenie tajomstva kvantovej mechaniky

Preprint 2007 (MS Word verzia)

Preložené z anglického originálu *Demystifying Quantum Mechanics*, Massachusetts Institute of Technology, Boston, 2000.

Moderné informačno-komunikačné technológie a status preprintu tejto publikácie nám dovoľuje obrátiť sa s prosbou na našich kolegov, spolupracovníkov v oblasti didaktiky fyziky a nielen v nej o zaslanie svojich komentárov a názorov, resp. upozornení na zistené chyby a nedostatky.

Na základe tejto širšej spätnej väzby bude možné v časovom horizonte jeden rok a za nižších nákladov pripraviť, resp. rozšíriť tento preprint do akceptovateľnejšej a kvalitnejšej formy a obsahu v porovnaní so štandardným publikovaním. Informácie o presnom dátume prvého vydania žiadajte na emailovej adrese <jozef.hanc@upjs.sk>.

Prírodovedecká fakulta
Univerzita Pavla Jozefa Šafárika, Košice

© Edwin F. Taylor, 2000
© Jozef Hanč, 2007

Táto publikácia vznikla s príspevím grantovej agentúry MŠ SR KEGA v rámci projektov 3/3005/05 *Vyučovanie fyziky programovaním modelov fyzikálnych javov pomocou interaktívneho softvéru*.

Všetky práva vyhradené. Žiadna časť tohto dokumentu nemôže byť žiadnym médiom reprodukováaná a prenášaná bez písomného súhlasu autorov. Autorský kolektív bezplatne poskytne písomné dovoľenie vyhotoviť alebo distribuovať doslovný opis tohto dokumentu alebo jeho časti akýmkoľvek médiom za predpokladu, že bude zachované oznámenie o coryrighte a oznámenie o povolení a že distribútor príjemcovi poskytne povolenie na ďalšie šírenie, a to v rovnakej podobe, v akej ho dostane od autorov.

CVIČEBNICA KVANTOVEJ MECHANIKY

Edwin F. Taylor

Táto cvičebnica zoznamuje čitateľa s hlavnými črtami Feynmanovho prístupu ku kvantovej mechanike založeného na sčítavaní cez všetky dráhy. V cvičebnici je veľa odkazov na nasledujúcu knihu, na ktorej je tento kurz založený.

QED, The Strange Theory of Light and Matter (Nezvyčajná teória svetla a hmoty)
Richard Feynman (s Ralphom Leightonom), Princeton University Press, 1985,
Paperback ISBN 0-691-02417-0.

Pozrite si tiež odsek „ODPORÚČANÉ ČÍTANIE“ na neskoršej strane.

Na konci tejto cvičebnice je uvedený reprint článku, ktorý obsah tejto cvičebnice zhrňa pre profesionálnu verejnosť.

Väčšia časť tejto knihy pozostáva z počítačových cvičení, ktoré musia študenti vypracovávať pri tom, ako sa zoznamujú s Feynmanovým prístupom ku kvantovej mechanike. Softvér je podstatnou časťou tohto kurzu. Skoršie verzie týchto programov a cvičení boli použité pri výuke na Univerzite vo Washingtone a na Carnegie Mellon University. Boli tiež mnohokrát použité v internetových kurzoch vedených z Montana State University, ktorých sa zúčastňovali hlavne stredoškolskí učitelia fyziky.

Webová stránka pre internetové kurzy je: <http://btc.montana.edu/nten>
Prípadne kontaktujte Kelly Boyce na adrese kboyce@montana.edu, Fax(406) 994-6546, telefón 406-994-6612.

POZNÁMKA: Toto sú skúšobné materiály (tak isto ako doprevádzajúci softvér), NIE sú v konečnom tvare a sú aktuálne prepracovávané každých niekoľko mesiacov. AK chcete získať najnovšie verzie, kontaktujte autora na nasledujúcich adresách.

Webová stránka: <http://www.eftaylor.com>

Email: eftaylor@mit.edu

Poštová adresa: 22Hopkins Road, Arlington, Ma 02476-8109, USA

Obsah

Úvod	2
Odporúčané čítanie z kvantovej mechaniky	4
Prehľadný obsah Feynmanovej knihy QED	6
Staré a nové myšlienky QED	7
„Vlna verzus častica“, „Čo znamená vysvetliť“, „Čo je realita“	8
Cvičenia k programu ODRAZ (REFLECT)	10
Cvičenia o fotóne využívajúce program JEDNA ČASTICA (ONE PARTICLE)	15
Kvantové stopky pre voľný elektrón	24
Princíp najmenšieho účinku	31
Elektrón v prítomnosti potenciálu	42
Svetočiary kvantovej častice	50
Vlnová funkcia	58
Propagátor voľnej častice	67
Jednoduchý harmonický oscilátor	82
Feynmanove diagramy	87
Článok G.I. Taylor, Interference fringes with feeble light, Proc. Camb. Phil. Soc. 15, 114-115 (1909)	
Úryvok z Feynmanových prednášok z fyziky, diel III, kap. 19	
Článok E.F. Taylor et al., „Teaching Feynman’s Sum-Over-Paths Quantum Theory“, Comp.Phys.12 (2), 190-199 (1998)	
Článok Hanč, J., Tuleja, S., Hančová, M., „Základy modernej fyziky dneška II: Kvantová mechanika (Podľa R.P.Feynman, QED-The Strange Theory of Light and Matter)“, Obzory matematiky, fyziky a informatiky, 2/2000 (29), 37-45	
Článok Hanč, J., Tuleja, S., Hančová, M., „Základy modernej fyziky dneška III: Kvantová mechanika (Podľa E.F.Taylor, Demystifying Quantum Mechanics)“, Obzory matematiky, fyziky a informatiky, 3/2000 (29), 31-44	

ODPORÚČANÉ ČÍTANIE Z KVANTOVEJ MECHANIKY

Populárne knihy:

Existuje fúra populárnych kníh týkajúcich sa kvantovej mechaniky. Prezrite si oddelenie vedy vo vašej miestnej knižnici alebo kníhkupectve. Ak máte nejaký obľúbený titul, povedzte o ňom druhým účastníkom. Mojimi súčasťnými favoritmi sú knihy:

QED, Strange Theory of Light and Matter, R.P. Feynman, Princeton, 1985, ISBN 0-691-02417-0. Toto je náš doplnkový text, a súčasne miniatúrny zázrak. Feynman podáva kvantové príklady v tak jednoduchom tvare, aby im porozumeli a mohli sa nimi riadiť, aj dokonale hlúpy elektrón a fotón. Toto je dobrá správa. Zlá správa je, že očividne neexistuje kniha, ktorá by vychádzala z takéhoto jednoduchého poňatia a rozvíjala ho potom ďalej pre seriózneho študenta - začiatčníka, ktorý sa chce naučiť kvantovú mechaniku. Okrem tejto knihy, máme už len univerzitné texty. Slovenský preklad knihy vydalo vydavateľstvo Enigma, Nitra, 2000.

Schrödinger's Kittens and the Search for Reality: Solving the Quantum Mysteries, John Gribbin, Little Brown, 1995, ISBN 0-316-32838-3. Prekrásne napísaná kniha. Excelentný prehľad kvantovej mechaniky a jej moderných aplikácií a paradoxov. Excelentná je tiež prezentácia alternatívnych interpretácií teórie. Autor očividne uprednostňuje *transakčnú teóriu* kvantovej mechaniky. Ak si chcete kúpiť jednu doplnkovú knihu, toto je ona.

The Meaning of Quantum Theory, Jim Baggot, Oxford, 1992, ISBN 0-19-855575-X. Rovnaký prístup ako Gribbinov, ale už aj s rovnicami.

Úvodné knihy ku kvantovej mechanike

Six ideas that Shaped Physics, Unit Q: Matter Behaves like Waves, by Thomas A. Moore, McGraw Hill, 1998, ISBN 0-471-76450-7. Môj obľúbený nedávno vyjdený úvod do kvantovej mechaniky. (V súčasnosti existuje novšie vydanie.)

Modern Physics for Scientists and Engineers, J. R. Taylor. C. D. Zafiratos, Prentice-Hall, 1991. Ďalší z aktuálnych úvodov do kvantovej mechaniky.

Modern Physics, by P. A. Tipler, Worth, 1978, ISBN 0-87901-088-6. Prekrásne napísaná učebnica, lenže zastaralá.

An Introduction to Quantum Physics, A. P. French, E. F. Taylor, Norton, 1978, ISBN 0-393-09106-0. Prekrásne napísaná učebnica, lenže zastaralá.

The Physics of Atoms and Quanta, Hermann Haken, Hans Christoph Wolf, Fourth Edition, Springer-Verlag, 1994, ISBN 0-387-57874-9. Moderná a obsiahla, ale pre tento kurz príliš matematická.

Introduction to Quantum Mechanics, D. J. Griffiths, Prentice-Hall, 1995, ISBN 0-13-124405-1. Odporúčaná mnohými ako najlepší aktuálny úvodný text kvantovej fyziky.

Knihy pre pokročilých

Quantum Mechanics and Path Integrals, R. P. Feynman, A. R. Hibbs, McGraw-Hill, 1965 (bez ISBN). Predstavuje Feynmanov pokus začať s teóriou sumácie cez všetky trajektórie a potom sa napojiť na tradičnú Schrödingerovu vlnovú teóriu.

Techniques and Applications of Path Integration, L. S. Schulman, John Wiley, 1996, ISBN 0-471-16610-3. Novší prístup k témam obsiahnutým vo Feynmanovi a Hibbsovi.

Principles of Quantum Mechanics, 2nd ed., by R. Shankar, New York, Plenum Press, 1994. Obsahuje pekný úvod do teórie sumácie cez všetky trajektórie a veľa aplikácií. Vhodná pre postgraduálne kurzy alebo pokročilejšie kurzy na univerzitách.

Originálny článok a Nobelovská prednáška

V roku 1948 napísal Richard Feynman zhrňajúci článok, ktorým predstavil akademickej verejnosti svoj nový pohľad na kvantovú mechaniku. Stretneme sa s ním v tomto kurze. Ak máte nutkanie vrátiť sa späť ku koreňom predmetu, tento článok je pre vás.

R. P. Feynman, „Space-time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics,“ *Reviews of Modern Physics*, Volume 20, Number 2, apríl 1948, strany 367 až 387

A tu je Feynmanova Nobelovská prednáška, v ktorej prechádza históriu svojej práce na tomto poli.

R. P. Feynman, „The Development of Space-Time View of Quantum Electrodynamics“ *Science*, Vol. 153, Number 3737 (12. august 1966), strany 699–708

Životopisy

Mnohému sa môžete priučiť aj tým, že budete sledovať pôvodných tvorcov teórie ako zápasili s problémami, ktorých úspešné vyriešenie viedlo k úspechu a Nobelovým cenám.

R. P. Feynman. *A Life in Science*, John Gribbin, Mary Gribbin, Dutton 1997, ISBN 0-525-94124-X. Najnovší životopis, trochu ukecanejší ako od Gleicka.

Genius, James Gleick, Random House, 1992, ISBN 0-679-74704-4. Prekrásne napísaný životopis Richarda Feynmana. Hovorí často o vedeckých problémoch, ale bez rovníc.

The Beat of a Different Drum: The Life and Science of Richard Feynman, Jagdish Mehra, Oxford 1994, ISBN 0-19-853948-7. Napísaná Feynmanovým kolegom. Vedou sa zaoberá serióznejšie a sú v nej aj rovnice.

QED and the Men Who Made It: Dyson, Feynman, Schwinger and Tomonaga, Silvan Schweber, Princeton, 1994, ISBN 0-691-03327-7. Ak hľadáte ÚPLNÚ históriu, s CELÝM matematickým formalizmom, tak je to vaša kniha. Zvyšok z nás sa tu tiež môže „čítaním pomedzi riadky s matematickými rovnicami“ mnohému naučiť.

PREHLADNÝ OBSAH KNIHY (SLOVENSKÉ VYDANIE)
QED: NEZVYČAJNÁ TEÓRIA SVETLA A HMOTY
R. P. Feynmana

Kapitola 1: Úvod				
Úvod.....	17-23	}	Úvod	
Prístup použitý v týchto prednáškach.....	23-27			
Svetlo a fotóny.....	27-30	}	Štruktúra kvantovej mechaniky	
Opis čiastočného odrazu.....	30-38			
Výpočet čiastočného odrazu cez amplitúdy pravdepodobnosti.....	39-47			
Iridescencia.....	47-49			
Kapitola 2: Fotóny–častice svetla				
Opakovanie a pohľad dopredu.....	51-53	}		Kvantová elektrodynamika
Odraz na zrkadlách.....	53-60			
Difrakčné mriežky.....	60-63			
Ďalšie vlastnosti svetla.....	64-73			
Zložené udalosti.....	73-77			
Znova čiastočný odraz.....	78-85			
Nezávislé udalosti.....	86-90			
Kapitola 3: Elektróny a ich interakcie				
Opakovanie.....	91-92	}	Fyzika vys. energií a gravitácia	
Meranie.....	93-97			
Tri základné deje.....	98-99			
Priestoročasové diagramy.....	100-101			
Amplitúdy troch základných dejov.....	102-106			
Elektrónovo–elektrónový rozptyl, poruchová teória pomocou diagramov.....	107-111			
Elektrónovo-fotónový rozptyl, antičastice.....	112-113			
Atómy.....	113-115			
Čiastočný odraz fotónov z fundamentálneho hľadiska.....	115-122			
Prechod fotónov cez látku z fundamentálneho hľadiska.....	122-123			
Zhlukovanie fotónov (bozóny a stimulovaná emisia).....	123-125			
Pauliho vylučovací princíp, chémia, fyzika tuhých látok.....	126-128			
Magnetický moment elektrónu.....	128-131			
Opakovanie.....	132-133			
Polarizácia.....	133-134			
Prechod ku klasickej fyzike.....	135-136			
Kapitola 4: Otvorené problémy				
Úvod.....	137-138	}		
Renormalizácia.....	138-141			
Pôvod interakčných konštánt.....	142-143			
Jadrová fyzika a quarky.....	143-146			
Silná interakcia.....	147-152			
Slabá interakcia.....	152-155			
Opakovanie generácií elem. častíc.....	156-162			
Veľké zjednotenie.....	162-163			
Gravitácia.....	164			
Záver.....	165			

TABUĽKA: STARÉ MYŠLIENKY VERZUS NOVÉ MYŠLIENKY QED
(Číslo strán sa vzťahujú na slovenské vydanie Feynmanovej knihy *QED*)

STARÁ MYŠLIENKA	Strana	NOVÁ MYŠLIENKA	Strana
Svetlo pozostáva z vln.		Svetlo pozostáva z „kúskov“ energie nazývaných fotóny.	30
Fotóny sa odrážajú od vrchného a spodného povrchu sklenenej platne.	34	Fotóny sa rozptyľujú na elektrónoch všade vo vnútri skla.	115
Fotón alebo voľný elektrón sa pohybuje po priamej dráhe zo zdroja do detektora.		Fotón alebo voľný elektrón skúma medzi zdrojom a detektorom VŠETKY dráhy.	53
Keď fotón skúma istú dráhu, ručička jeho „kvantových stopiek“ sa otáča.	41	Kým fotón skúma dráhu, zostáva ručička jeho kvantových stopiek nehybná. Počiatočná poloha ručičky stopiek závisí na počiatočnom čase emisie zo zdroja. (Keď elektrón skúma dráhu, ručička jeho „kvantových stopiek“ sa OTÁČA.)	116
„Dráha“ (ktorú skúma fotón alebo elektrón) predstavuje trajektóriu v priestore.		„Dráha“ predstavuje trajektóriu v priestore PLUS polohu častice na tejto trajektórii v každom čase. V reči teórie relativity, je dráha „svetočiara v priestoročasovom diagrame“.	100
Voľný elektrón (bez pôsobenia gravitačnej alebo elektrickej sily) má pozdĺž dráhy konštantnú kinetickú energiu.		Voľný elektrón, ktorý skúma veľa dráh, môže mať rôznu kinetickú energiu pozdĺž rôznych dráh a tiež pozdĺž rôznych častí jednej dráhy.	
Elektrón sa pohybuje v atóme pod vplyvom sily spôsobenej elektromagnetickým poľom jadra.		Elektrón skúma všetky dráhy v atóme, pričom si vymieňa virtuálne fotóny s jadrom a so sebou samým. (Nie je tu ŽIADNE pole!)	114
Fotóny na seba navzájom nepôsobia.		Fotóny majú sklon sa „zhlukovať“. Je to dôsledok štatistiky, ktorou sa riadia (Bose-Einsteinova štatistika). Feynman to nazýva efekt „polarizácie“.	111

„VLNA VERZUS ČASTICA“, „ČO ZNAMENÁ VYSVETLIŤ“ A „ČO JE REALITA“

Ľudia často diskutujú o fundamentálnych myšlienkach v kvantovej mechanike. Dan Styer z Oberlin College sa tu zasvätené vyjadruje k dvom takýmto témam. Na konci je uvedený Taylorov názor na tretiu tému. PROSÍME BERTÉ tieto komentáre iba ako osobné názory, ako niečo, o čom sa rozpráva na koktailových večierkoch!

VLNA VERZUS ČASTICA (STYER)

Myslím si, že Feynman robí na strane 15 svojej knihy *QED Nezvyčajná teória svetla a látky*, pedagogickú chybu, keď kladie dôraz na to, že svetlo pozostáva z častíc. Je to nepochybne pravda, že vždy, keď budete považovať svetlo za častice, dostanete správnu odpoveď. Musia to však byť častice, ktoré sa správajú nezvyčajným kvantovým spôsobom. Lenže slovo častica naznačuje skôr objekt, ktorý sa správa známym „baseballovým“ spôsobom.

Viac uprednostňujem Feynmanov opis tej istej situácie, ktorý podáva v knihe *Charakter fyzikálnych zákonov* (MIT Press, 1965, strana 128):

„Vieme ako sa správajú elektróny a svetlo. Lenže aká je ich podstata? Ak poviem, že sa správajú ako častice, vytvorím vo vás pomýlenú predstavu; to isté sa stane, keď poviem, že sa správajú ako vlny. Správajú sa svojím vlastným, nenapodobiteľným spôsobom, ktorý by bolo možné nazývať kvantovomechanický spôsob. Nesprávajú sa ako nič, čo ste doteraz videli. Vaše skúsenosti s vecami, s ktorými ste sa už stretli sú neúplné. Veci sa totiž v nepatrných mierkach správajú celkom odlišne. Atóm sa nespráva ako závažie visiace na pružine, ktoré osciluje. Nespráva sa ani ako miniatúrna napodobenina slnečnej sústavy s malými planétami krúžiacimi po orbitách. Nie je to ani mrak nejakého zvláštneho druhu hmly obklopujúcej jadro. Atóm sa nepodobá na nič, čo ste doteraz videli.“

ČO ZNAMENÁ „VYSVETLIŤ“ (STYER)

Teraz zopár slov o tom, čo vo vede znamená „vysvetliť“ a „pochopiť“. Niekedy môžeme nejaký jav vysvetliť pomocou niečoho jednoduchšieho. Napríklad: „Prečo dnes pršalo?“ „Pretože nás zasiahol studený front.“ „No dobre, ale prečo nás zasiahol studený front?“ „Pretože ho sem postrčilo prúdenie vzduchu.“ „Nuž ale, prečo ho sem prúdiaci vzduch postrčil?“ „Pretože Slnko ohrialo Albertu, a tým vychýlilo vzdušný prúd.“ „Dobre, ale prečo Slnko ohrieva objekty?“ A tak ďalej. (Každý, kto niekedy vychovával dieťa, pozná tieto nikdy nekončiace otázky až príliš dobre.) Pointa je v tom, že takéto reťaze otázok prechádzajú čoraz hlbšie a hlbšie k čoraz fundamentálnejším témam, a v jednom bode sa jednoducho skončia. Prečo sa fotóny správajú tak, ako sa správajú? Máme podrobnú teóriu, QED, ktorá opisuje spôsob, ktorým sa fotóny správajú, lenže nevysvetľuje, prečo sa správajú práve takýmto spôsobom. Vysvetlenie stále so sebou prináša prechod o jednu úroveň hlbšie, no a QED je to najhlbšie, čo máme ... aspoň nateraz. Jedného dňa možno budeme mať k dispozícii niečo hlbšie. To však podstatne našu situáciu nezmení, pretože to bude len ďalšia, hlbšia úroveň, ktorá opisuje ale nevysvetľuje.

ČO JE „SKUTOČNOSŤ“? (TAYLOR)

Podľa môjho názoru fyzikálna teória nehovorí priamo o „skutočnosti“. (Prepáčte!) Namiesto toho, vám teória pomáha odhaliť, akú procedúru musíte vykonať, aby ste získali predpoveď, ktorá môže byť overená experimentom. Napríklad, QED vám hovorí ako určiť pravdepodobnosť toho, že v danom mieste a čase bude detekovaný elektrón. Aby bolo ľahšie predstaviť si túto procedúru, kvantová teória (tvrdil by som, že KAŽDÁ VEDECKÁ TEÓRIA) používa metafory, v tomto prípade všetky tie reči o dráhach a stopkách. Sú tieto

stopky „skutočné“? Rotujú ich ručičky „naozaj“? Prechádza „v skutočnosti“ elektrón všetky dráhy? Ako vravia obyvatelia Brooklynu: „Fuggedaboddit!“ Zabudnite na to! Keď sa budete vypytovať takéto otázky, len vás privedú do šialenstva. A čo sa týka praktických predpovedí, budete tam, kde ste boli. Samozrejme, môžete hľadať elektrón na jednej z týchto dráh a použiť rovnakú procedúru na správne predpovedanie pravdepodobnosti zachytenia v tom mieste. Lenže to už je *iný* experiment a nedovedie vás o nič bližšie ku „skutočnosti“.

POZNÁMKA: To, čo znamená „vysvetliť“ a čo je „skutočnosť“ je predmetom oveľa detailnejšej a hlbšej diskusie v 2. kapitole knihy Stevena Weinberga, *Dreams of a Final Theory* (Vintage, 1994, ISBN 0-679-74408-8).

CVIČENIA K PROGRAMU ODRAZ (REFLECT)

ÚVOD

Program ODRAZ (REFLECT) je vytvorený tak, aby simuloval teóriu súčtu cez všetky dráhy, ktorú Richard Feynman (s Ralphom Leightonom) opisuje v knihe *QED: Nezvyčajná teória svetla a hmoty*. Program ODRAZ (REFLECT) simuluje čiastočný odraz svetla na povrchoch skla.

A. SAMOŠTÚDIUM K CVIČENIAM K PROGRAMU ODRAZ (REFLECT)

Kapitola 1 knihy *QED*: Na 4. strane tejto cvičebnice je uvedený alternatívny obsah knihy *QED* podľa jednotlivých tém, ktorý spracoval Dan Styer. Tento obsah poskytuje oveľa viac informácií než ten, ktorý je v samotnej knihe *QED*. Voliteľné: Spustíte program ODRAZ (REFLECT) a trochu sa s ním pohrajte. Vyskúšajte si niektoré z myšlienok prezentovaných v tejto kapitole. Tento softvér budete používať v nasledujúcich cvičeniach.

DISKUSNÉ OTÁZKY K SAMOŠTÚDIU

Počas čítania odpovedzte na nasledujúce diskusné otázky. (NETREBA ich odovzdať s domácou úlohou ale budú potrebné pri diskusii v študijnej skupine.)

D1. Akou praktickou metódou (metódami) možno detekovať fotón?

D2. Ako je preboha možné, že povrch skla môže tento JEDEN fotón odraziť, ALE AJ prepustiť? Alebo ho odráža a prepúšťa SÚČASNE?

D3. Veľmi tenká platňa skla dáva nulový odraz. Ako je to možné, keď taká istá časť svetla je odrazená od oboch povrchov – vrchného aj spodného?

D4. Kam sa podeje fotón, keď sa neodrazí od tenkej sklenenej platničky? Kde ho môžeme detekovať?

D5. Sčítanie šípok:

Šípka **V** je 2 jednotky dlhá a ukazuje na sever.

Šípka **W** je 1 jednotku dlhá a ukazuje na východ.

Šípka **X** je 2,5 jednotky dlhá a ukazuje na juh.

Šípka **Y** je 3 jednotky dlhá a ukazuje na západ.

Šípka **V** je 0,5 jednotky dlhá a ukazuje na sever.

Tieto šípky teraz spolu sčítame. Aký bude SMER a DĹŽKA výslednej šípky? Získame inú výslednú šípku, ak šípky sčítame v inom poradí?

B. DRUHÝ DETEKTOR V SKLE

SAMOŠTÚDIUM, KTORÉ JE POTREBNÉ SI ZOPAKOVAŤ K ODDIELU B: *QED*, kapitola 1 až po stranu 19.

Spustite program ODRAZ (REFLECT). Kliknite na tlačidlo označené DRUHÝ DETEKTOR (SECOND DETECTOR) a potom kliknite niekde vo vnútri skla v ľavej časti obrazovky. (VŠETKY otázky v tomto oddieli sa vzťahujú k situácii, v ktorej je detektor B vo vnútri skla – tak isto ako na obrázku 2, strana 17 v *QED*.) Teraz kliknite na tlačidlo ŠTART (START).

Čo sa deje? Pritom ako fotón skúma každú dráhu, rotuje na zodpovedajúcich stopkách šípka. Naším cieľom je zistiť dĺžku šípky v každom detektore. PRAVDEPODOBNOSŤ toho, že v tomto detektore bude detekovaný fotón, je potom priamo úmerná druhej mocnine dĺžky šípky v tomto detektore. (Feynman to vysvetľuje na stranách 24 a 25.) Všetky experimenty s čiastočným odrazom – v skutočnosti všetky experimenty kvantovej mechaniky – možno opísať použitím týchto malých rotujúcich šípok. Dosť čudné, nie!?

Predbežné výpočty

Na obrazovke sa dĺžka šípky stopiek „pre sklo“ rovná 0,98-násobku dĺžky pôvodnej šípky, na pôvodných stopkách „pre vzduch“. A dĺžka šípky „pre odrazenú“ dráhu sa rovná 0,2-násobku dĺžky pôvodnej šípky na stopkách „pre vzduch“. Odpovedajte na každú z nasledujúcich otázok len JEDNÝM číslom (číslo môže mať viac než jednu číslicu) alebo JEDNÝM slovom.

B1. Čomu sa rovná PRESNÁ hodnota druhej mocniny 0,98? Má to byť pravdepodobnosť toho, že fotón bude za daných podmienok zachytený detektorom B.

B2. Čomu sa rovná PRESNÁ hodnota druhej mocniny 0,2? Má to byť pravdepodobnosť toho, že fotón bude za daných podmienok zachytený detektorom A.

B3. Čomu sa rovná PRESNÁ hodnota súčtu týchto druhých mocnín? Má to byť celková pravdepodobnosť toho, že fotón bude za daných podmienok zachytený BUĎ detektorom A ALEBO detektorom B.

B4. Je súčet týchto pravdepodobností menší, alebo väčší než 1?

B5. NÁJDITE – s presnosťou na štyri desatinné miesta – dĺžku takzvanej „0,98-šípky“ tak, aby súčet pravdepodobností DÁVAL dokopy číslo, čo možno najbližšie k jednotke?

Cvičenia pri počítači

B6. Koľko otáčok približne vykoná ručička pôvodných stopiek „pre vzduch“ v prvej časti dráhy smerujúcej nadol medzi detektorom A a povrchom skla (pre pôvodnú červenú farbu)?

B7. Umiestnite detektor B v RÔZNYCH zvislých polohách. Všetky nech sú vo vnútri skla. Mení sa pravdepodobnosť detekcie v A so vzdialenosťou B od vrchného povrchu skla?

B8. Pokračujte v experimente tým, že umiestnite detektor B v rôznych zvislých polohách. VŠETKY nech sú vo vnútri skla. Mení sa pravdepodobnosť detekcie v B so vzdialenosťou B od horného povrchu skla?

B9. Opíšte všetko, čo sa mení ohľadom detekcie v B, keď má detektor B vnútri skla rôzne zvislé polohy. (Pri odpovedi na túto otázku použite maximálne DESAŤ slov.)

B10. Mení sa NIEČO ohľadom detekcie v A, keď meníme zvislú polohu detektora B vo vnútri skla?

C. LEN DETEKTOR A

SAMOŠTÚDIUM K ODDIELU C: R. P. Feynman, *QED*, dokončíte 1.kapitolu (strany 20 až 35).

VŠETKY otázky v tomto oddieli sa vzťahujú na situáciu, v ktorej uvažujeme iba detektor A (podobne ako na obrázkoch 10 a 11, na stranách 28 a 29 v *QED*).

Predbežné výpočty

V otázkach C1 až C7 predpokladajte, že pri každom prechode (zo vzduchu do skla alebo zo skla do vzduchu) sa dĺžka šípky vynásobí faktorom 0,98 a pri každom odraze sa dĺžka šípky vynásobí faktorom 0,2. Odpovede zaokrúhlite na tri desatinné miesta.

C1. Určte dĺžku šípky skúmajúceho fotónu, ktorý prechádza cez sklo, predtým ako sa odrazí od spodného povrchu skla?

C2. Určte dĺžku šípky fotónu, ktorý prechádza cez sklo nahor, po prvom odraze od SPODNÉHO povrchu skla?

C3. Akú dĺžku bude mať šípka fotónu potom, čo fotón preletí sklom dole a hore, a cez HORNÝ povrch skla prejde späť do vzduchu?

C4. Akú MAXIMÁLNU možnú dĺžku môže mať VÝSLEDNÁ ŠÍPKA, keď šípku prvej dráhy (jednoduchý odraz od horného povrchu) pripočítame ku šípke druhej dráhy (odpoveď na otázku C3)?

C5. Aká je teda MAXIMÁLNA PRAVDEPODOBNOSŤ toho, že fotón bude zachytený detektorom A?

C6. Akú MINIMÁLNU dĺžku môže mať VÝSLEDNÁ ŠÍPKA, keď šípku prvej dráhy (jednoduchý odraz od horného povrchu) pripočítame ku šípke druhej dráhy (odpoveď na otázku C3)?

C7. Aká je teda MINIMÁLNA PRAVDEPODOBNOSŤ toho, že fotón bude zachytený detektorom A? (na dve platné číslice)

Cvičenia pri počítači

Kliknite na tlačidlo označené IBA DETEKTOR A (DETECTOR A ONLY). Teraz kliknite na tlačidlo ŠTART (START). Všetky nasledujúce cvičenia predpokladajú, že fotón má pôvodne nastavenú ČERVENÚ farbu. Aby ste mohli odpovedať na nasledujúce otázky, použite tlačidlo GRAPH.

C8. Nájdite hrúbku skla (čo najbližšie k 100 pixelom), ktorá vedie k maximu odrazu? Svoju odpoveď zapíšte.

C9. Akú hrúbku musí mať sklo (väčšiu alebo menšiu, vyberte si) aby sme dostali znovu maximum, a aby bola čo najbližšie k vašej odpovedi na otázku C8? Svoju odpoveď zapíšte.

C10. Akú NAJMENŠIU hrúbku (v pixeloch) môže mať sklo, keď chceme v detektore A získať MAXIMÁLNU pravdepodobnosť?

C11. Akú NAJMENŠIU hrúbku (v pixeloch) môže mať sklo, keď chceme v detektore A získať MINIMÁLNU pravdepodobnosť?

C12. Sú hrúbky skla zodpovedajúce maximám rovnomerne rozložené? Myslí sa v pixeloch, plus mínus jeden alebo dva pixely. (NEVENUJTE primného času získaniu bodov celej krivky. Pracujte s dôvtipom, nie ťažko!)

D. DETEKTOR B POD SKLOM

SAMOŠTÚDIUM K ODDIELU D: Feynman, *QED*, 2. kapitola, od strany 67 po 3.kapitolu, plus strana 83.

Poznámka: Pred týmto samoštúdiom a nasledujúcimi cvičeniami, študenti preštudovali 2. kapitolu, od strany 36 po stranu 67 a vykonali cvičenia k programu JEDNA ČASTICA (ONE PRARTICLE), ktoré sa týkajú fotónu.

VŠETKY otázky v tomto oddieli sa vzťahujú na situáciu, v ktorej je detektor B pod sklom (podobne ako to je na obrázku 4 na strane 20 a obrázku 44 na strane 70 v QED).

Cvičenia pri počítači

D1. Pohybuje sa fotón rovnakou rýchlosťou v skle ako vo vzduchu? (Nepoužívajte nastavenie RÝCHLO (FAST), pretože pri tomto nastavení letí fotón najrýchlejšie ako to počítač dokáže, nie tak rýchlo, ako by mal.)

D2. Nájdite hrúbku skla (čo najbližšie ku 100 pixelom), ktorá vedie k minimu pravdepodobnosti detekcie v detektore B? Svoju odpoveď zapíšte.

D3. V priemere, ako ďaleko od seba (v pixeloch) sú minimá pravdepodobnosti detekcie v detektore B? (Možno budete chcieť spolu s touto otázkou odpovedať aj na otázku D4. NEVENUJTE primného času získaniu bodov celej krivky. Pracujte s dôvtipom, nie ťažko!)

D4. Majú všetky minimá pravdepodobnosti pre detektor B, v rozsahu hrúbok skla od 0 po 150 pixelov, rovnakú hĺbku (hodnotu pod jednotkovou pravdepodobnosťou)? (NEVENUJTE primného času...)?

Cvičenia pri počítači

Otázky D5 až D8 sa týkajú situácie, keď uvažujeme tú ISTÚ hrúbku skla ale RÔZNE vzdialenosti detektora B pod sklom – všetko pre ČERVENÚ farbu. Odpovedajte na všetky tieto otázky áno alebo nie.

D5. Je pre rôzne vzdialenosti detektora B pod sklom *dĺžka* výslednej šípky v detektore B rôzna?

D6. Je pre rôzne vzdialenosti detektora B pod sklom *uhol otočenia* výslednej šípky v detektore B rôzny?

D7. Závisí *pravdepodobnosť* toho, že fotón bude zachytený v detektore B od vzdialenosti detektora B pod sklom?

D8. Predpokladajme, že pravdepodobnosť v B má pre danú hrúbku skla minimálnu hodnotu. Bude táto pravdepodobnosť minimálna, aj keď detektor pod sklom premiestnime?

CVIČENIA O FOTÓNOCH KU PROGRAMU „JEDNA ČASTICA“ (ONE PARTICLE)

SAMOŠTÚDIUM K ODDIELOM A AŽ E: Feynman, *QED*, 2. kapitola, strany 51 až 69

A. ÚVOD

Program JEDNA ČASTICA (ONE PARTICLE) simuluje kvantovomechanickú teóriu súčtu cez všetky dráhy, ktorú opísal Richard Feynman (a Ralph Leighton) v knihe *QED: Nezvyčajná teória svetla a hmoty* (Princeton University Press, 1985; Slovenský preklad Enigma, Nitra, 2000)

ŤAŽKOSTI ŠTUDENTOV S OBRÁZKAMI 47 a 48, na stranách 87 a 91 *QED*.

ISTÝ ŠTUDENT SA PÝTA:

Nerozumiem diagramom v spodnej časti obrázka 48 (strana 87). Šípka označená „z X do A a z Y do B (prvý spôsob)“ vľavo dole na obrázku 48 nezodpovedá šípkam označeným „z X do A a z Y do B“ vpravo dole na obrázku 47 (strana 91). Tiež nechápem sčítanie vektorov na spodku obrázka 48. Možno, že s odstupom času to pochopíme.

ODPOVEĎ:

Naozaj to JE trochu mäťúce.

Najprv sa pozrite na STREDNÝ rad šípok na obrázku 48. Šípka, umiestnená vľavo, označená „z X do B“, sa stihne otočiť viac ako šípka označená „z X do A“, umiestnená v ľavej spodnej časti predchádzajúceho obrázka 47 – pretože vzdialenosť z X do B (obrázok 48) je väčšia než vzdialenosť z X do A (obrázok 47).

Teraz sa pozrite na skupinu šípok v pravej dolnej časti obrázka 47, označenú „z X do A a z Y do B“. Výslednou šípkou je malá šípka, označená 0,25, ktorá ukazuje v smere „10 hodín“. (Je „súčinom“ dvoch predchádzajúcich šípok naľavo od nej – nič viac, len skracovanie a otáčanie.) Túto malú šípku vidíme znovu na obrázku 48 vľavo, úplne dole.

Ďalej sa pozrite na skupinu šípok napravo v STREDNOM rade na obrázku 48. Výslednou šípkou je malá šípka, označená 0,25, ktorá ukazuje v smere „3 hodiny“. (Je „súčinom“ dvoch predchádzajúcich šípok po jej ľavej strane – opäť nič viac, len skracovanie a otáčanie.) Túto malú šípku vidíme znovu v strednom diagrame na spodku obrázka 48.

Nakoniec si všimnite, že diagram vpravo dole na obrázku 48 pochádza zo SČÍTANIA dvoch malých šípok po jeho ľavej strane. Dostávame výslednú šípku

pre OBIDVA alternatívne spôsoby, ktorými sa môžu dostať dva fotóny z X a Y do detektorov A a B.

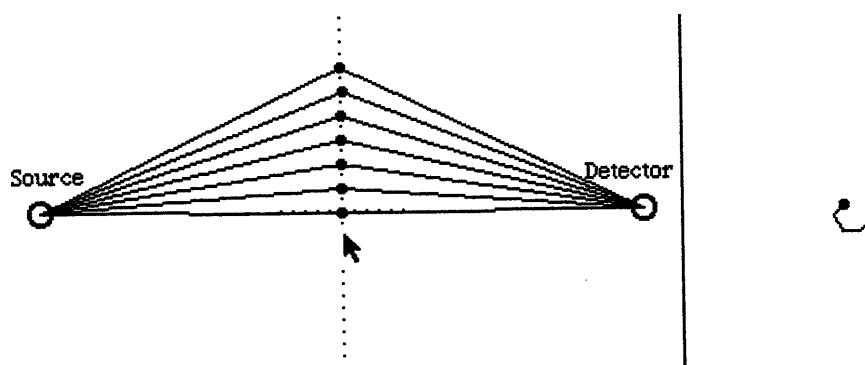
Dáva to zmysel? Edwin

Nasledujúce cvičenia používajú voľby „červený fotón“ a „modrý fotón“, pričom nateraz ignorujú „elektrón“.

Prejdite cez časť ÚVOD (INTRODUCTION) programu JEDNA ČASTICA (ONE PARTICLE).

B. „PRIAMOČIARY POHYB“?

Opustite alebo preskočte ÚVOD (INTRODUCTION). Skontrolujte, či vidíte v hornej časti obrazovky napísané ČERVENÝ FOTÓN (RED PHOTON). V prvej obrazovke vyberte kliknutím sériu bodov pozdĺž zvislej bodkovanej čiary, ktorá sa tiahne na pol cesty medzi zdrojom a detektorom. Z každého jej bodu môžete vytvoriť bod zlomu dráhy, ktorú fotón skúma. Začnite blízko vrchu obrazovky a vytvorte stĺpec bodov postupne zhora nadol. Obrázok dole znázorňuje, čo by ste v priebehu tohto procesu mali vidieť na obrazovke. Naším cieľom v oddieloch B a C bude objaviť to, ktoré dráhy dávajú najväčší príspevok k výslednej šípke v detektore.



Poznámka 1: Ľubovoľný prostredný bod môžete zmazať tak, že na neho opätovne kliknete. To pre prípad, že by ste chceli preñ zadať novú polohu.

Poznámka 2: Body by ste *mohli* umiestňovať pozdĺž bodkovanej čiary v akomkoľvek poradí. No, ak budete body umiestňovať postupne zhora nadol (alebo zdola nahor), budú malé ručičky stopiek, ktoré sa pripočítavajú jedna k druhej v pravej časti obrazovky, ležať pozdĺž známej krivky tvaru S, nazývanej **Cornuova špirála**.

Teória: **Výslednú šípku** môžete vidieť v pravej časti obrazovky, keď kliknete na tlačidlo označené **VÝSLEDNÁ ŠÍPKA (RESULTING ARROW)**. Drobné ručičky stopiek, zodpovedajúce všetkým dráham, ktoré ste vybrali, sa potom sčítajú (spôsobom hlava k päte). Päta výslednej šípky je v pôvodnom počiatočnom bode a jej hlava je v polohe konca naposledy pridanej ručičky stopiek.

Celková pravdepodobnosť toho, že fotón prejde zo zdroja do detektora cez vybrané dráhy je priamoúmerná druhej mocnine dĺžky výslednej šípky.

Otázky:

B1. Zopakujte konštrukciu niekoľko krát, pričom venujte pozornosť tomu, ako sa v ľavej časti obrazovky malé šípky pripočítavajú. Zistíte a zapíšete, ktoré dráhy prispievajú najviac k výslednej šípke v pravej časti obrazovky.

B2. Ako je možné, že isté dráhy prispievajú k výslednej amplitúde viac než iné, aj keď všetky malé ručičky stopiek majú tú istú dĺžku?

B3. Ktoré dráhy dávajú zanedbateľný príspevok k výslednej šípke v pravej časti obrazovky? Vysvetlite jednou alebo dvomi vetami prečo.

B4. Keď ste už klikaním vybrali súbor prostredných bodov, kliknite na tlačidlo PRIDAŤ DETEKTORY (ADD DETECTORS) a klikajte na rôzne body zvislej bodkovanej čiary, prechádzajúcej napravo cez pôvodný detektor. Ako sa odlišujú krivky v pravej časti obrazovky získané pre tieto nové detektory od Cornuovej špirály získanej pre pôvodný detektor? Opíšte ako sa tieto krivky a výsledná šípka menia pozdĺž radu detektorov uložených jeden pod druhým na zvislej bodkovanej čiare, počínajúc detektorom v strede.

Diskusná otázka: Fundamentálna ťažkosť v myslení teraz aj neskôr:

B5. Rachel hovorí: „Celý tento aparát je jeden veľký nezmysel. Predpokladajme, že do množiny prostredných bodov zahrnieme každý bod zvislej bodkovanej čiary zobrazenej hore. Fotón *musí* na svojej ceste od zdroja k detektoru cez túto zvislú bodkovanú čiaru prejsť. Týchto prostredných bodov je ale nekonečný počet. Každý prispieva k výslednej šípke. Z toho dôvodu bude táto výsledná šípka nekonečne dlhá a druhá mocnina jej dĺžky bude tiež nekonečná. To však naznačuje, že do detektora príde nekonečný počet fotónov. Lenže všetky tieto dráhy skúma len jeden fotón! Tento nezmyselný výsledok ukazuje, že celá táto konštrukcia nemôže reprezentovať Prírodu.” Rozoberte problém, ktorý má Rachel. Rozriešte ho, ak je to možné – len pokojne, máte čas!

C. VEĽA DRÁH?

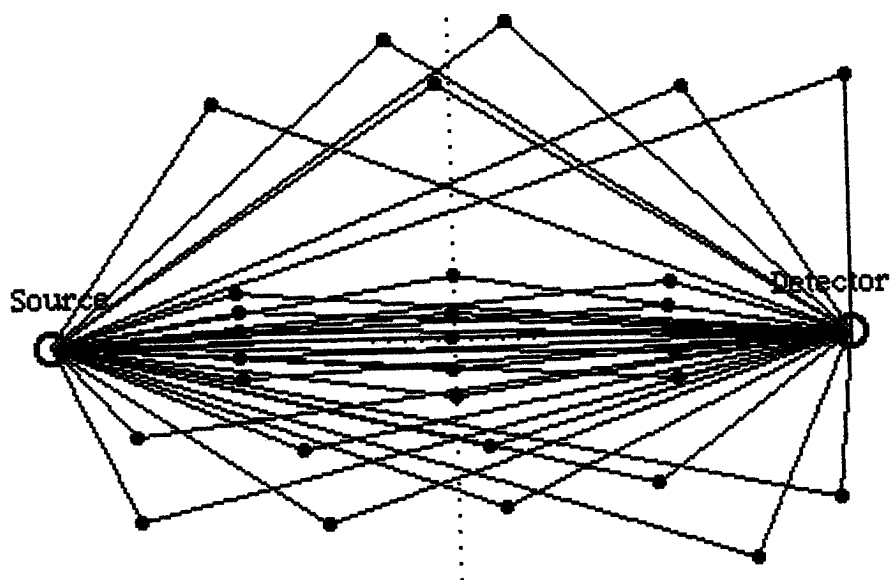
Kliknite na tlačidlo NOVÝ PRÍPAD (NEW CASE). Predstavte si priamku spájajúcu zdroj a detektor. Kliknutím vyberte viacero bodov, ktoré ležia *na alebo blízko* tejto priamky, tak, ako na nasledujúcom obrázku:



Otázka:

C1. Čo ste si všimli na výslednej šípke v pravej časti obrazovky, ktorá vznikla zložením všetkých drobných ručičiek stopiek?

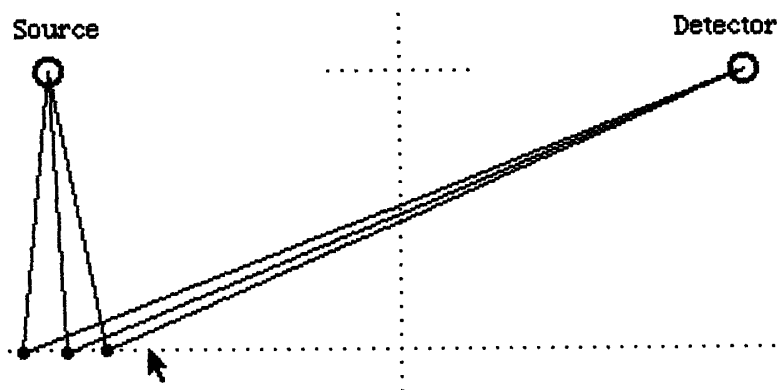
Teraz pridajte ešte ďalšie prostredné body, ktoré nech ležia ďalej od stredovej priamky medzi zdrojom a detektorom, tak, ako je to na nasledujúcom obrázku:

**Otázka:**

C2. Ako vplývajú tieto body, ktoré sú ďalej od stredovej priamky, na výslednú šípku v pravej časti okna? Inými slovami: Ako sa odrazilo pridanie týchto bodov na dĺžke výslednej šípky v pravej časti okna?

D. ZRKADLO

Ktoré časti zrkadla prispievajú najviac k odrazu do detektora? Kliknite na tlačidlo NOVÝ PRÍPAD (NEW CASE). Napodobnite obrázok 20 na 55.strane *QED* tak, že pozdĺž nižšej bodkovanej vodorovnej čiary, ktorá leží pozdĺž spodného okraja ľavej časti obrazovky naklikáte dlhý reťazec prostredných bodov. Takto nejako by mohla vyzeráť začiatková etapa konštrukcie obrázka 20:



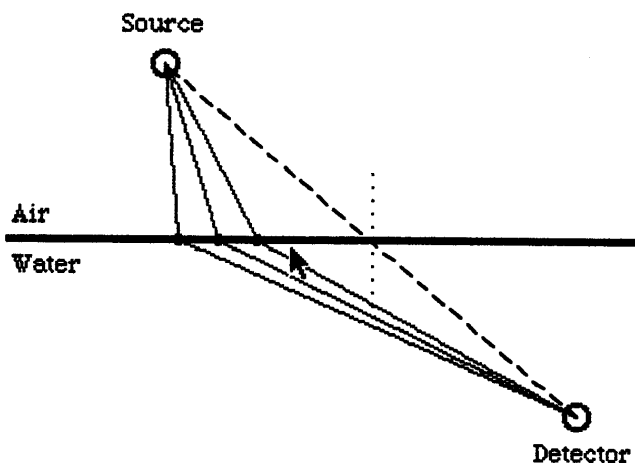
Otázka:

D1. Pre ktoré prostredné body pozdĺž bodkovanej „zrkadliacej“ priamky sa „ručičky stopiek“ v okne na pravej strane sčítavajú viac-menej v rovnakom smere?

E. VODA

Ktoré z dráh, prechádzajúcich cez hladinu vody, prispievajú najviac k výslednej šípke v detektore pod vodou? Stlačte tlačidlo NOVÝ PRÍPAD (NEW CASE) a potom tlačidlo VODA (WATER). Umiestnite prostredné body postupne pozdĺž vodnej hladiny zľava doprava. Nasledujúci obrázok ukazuje začiatok tohto procesu. Aby sa vám ľahšie odpovedalo na nasledujúce otázky, pozorujte pritom, ako budete postupne pridávať body, ručičku stopiek v hornej časti obrazovky.

Poznámka: Táto časť programu vám dovoľuje umiestniť prostredné body *iba* na vodný povrch.

**Otázky:**

E1. Dostali ste v pravom okne Cornuovu špirálu?

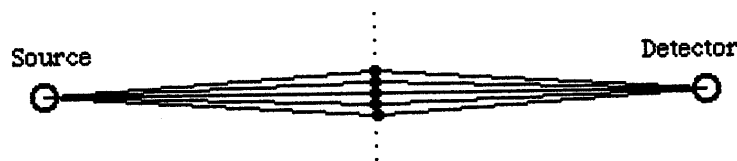
E2. Kde sú umiestnené prostredné body na rozhraní vzduch - voda, pre ktoré sa ručičky stopiek v pravej časti obrazovky pričítavajú viac-menej tým istým smerom. Ležia tieto body *vpravo* alebo *vľavo* od priamky spájajúcej detektor a zdroj (je zobrazená ako čiarkovaná čiara na obrázku hore)?

SAMOŠTÚDIUM K ODDIELU F: Feynman, *QED*, Kapitola 2, strany 69 až 74.

F. ÚZKE A ŠIROKÉ ŠTRBINY

Vráťte sa ku prípadu BEZ VODY (NO WATER) a umiestnite na zvislej bodkovanej priamke, v strede medzi zdrojom a detektorom, spolu blízko seba (tak aby sa dotýkali jeden druhého) štyri alebo päť bodov. Napodobíme tým prechod svetla cez

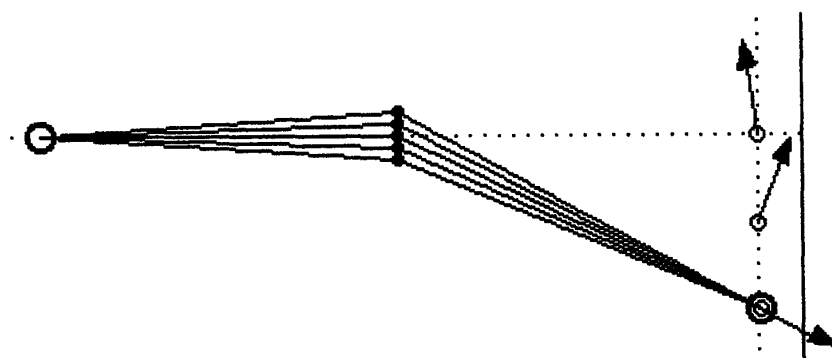
štrbinu, ako je to na obrázku 33 na 70. strane *QED*. Cieľom tejto činnosti bude po-



chopiť, ako sa svetlo šíri, keď prechádza cez úzke a široké štrbiny.

Teraz stlačte PRIDAŤ DETEKTORY (ADD DETECTORS) a klikajte na rôzne miesta zvislej bodkovanej čiary prechádzajúcej cez pôvodný detektor. Tým volíte rôzne umiestnenia detektora. V každej novej pozícii detektora je do polohy detektora skopírovaná výsledná šípka z pravej časti obrazovky.

Klikajte na rôzne miesta pozdĺž bodkovanej čiary prechádzajúcej cez prvý detektor a pritom sledujte koľko svetla ide do týchto rôznych smerov. Tu je príklad troch pozícií detektora:



Po každom novom umiestnení detektora, môžete kliknúť na tlačidlo ZMAZAŤ DRÁHY (CLEAR PATHS). Tým sa prekreslí obrázok bez zobrazenia dráh. Pokračujte v umiestňovaní detektorov pozdĺž tej istej zvislej priamky až po spodok obrazovky.

Existuje spôsob ako zobraziť dĺžky rôznych šípok prehľadnejšie. Stlačte ZMENIŤ NA FARBU (CHANGE TO COLOR) a potom VEĽA DETEKTOROV (MANY DETECTORS). Teraz sa všetky „šípky“ zoradia jedným smerom. Ich smery budú reprezentované rôznymi farbami, podľa FAREBNÉHO KOLESA (COLOR WHEEL) úplne vpravo hore na obrazovke.

Otázky:

F1. Pomocou pravítka zmerajte na obrazovke dĺžky výslednej šípky v strednom detektore a v detektore blízko spodku obrazovky. Vypočítajte pomer dĺžok týchto výsledných šípok pre spomínané dve umiestnenia:

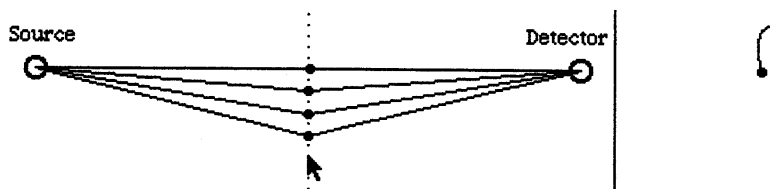
$$\text{pomer dĺžok šípok} = \frac{(\text{dĺžka šípky v detektore blízko spodku})}{(\text{dĺžka šípky v strednom detektore})}$$

F2. Čomu sa potom rovná pomer *pravdepodobností* pre príchod fotónu do spomínaných dvoch polôh?

$$\text{pomer} = \frac{(\text{pravdepodobnosť detekcie v detektore blízko spodku})}{(\text{pravdepodobnosť detekcie v strednom detektore})}$$

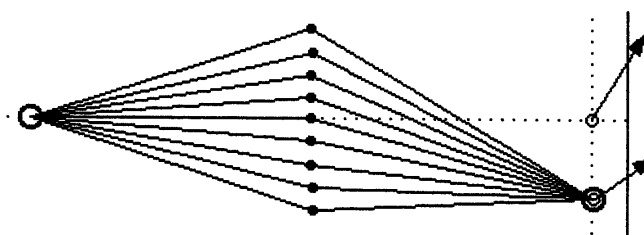
Teraz preskúmajte prípad, ktorý napodobňuje širokú štrbinu. Najprv sa však pozrite na to, čo pod širokou štrbinou rozumieme. Tu je jedna z definícií širokej štrbiny: Široká štrbina je štrbina najmenej šírky pre ktorú sa výsledná šípka v strednom detektore príliš neodlišuje od šípky zodpovedajúcej nekonečne širokej „štrbine“ (keď v ceste nestojí žiadna prekážka!). Inak povedané, široká štrbina je štrbina so šírkou dostatočnou na to, aby dávala tú časť Cornuovej špirály, ktorej malé šípky ležia viac-menej pozdĺž priamky.

Podľa tejto definície vytvorte širokú štrbinu: Začnite v strede (kde sa pretína vodorovná a zvislá bodkovaná priamka) a klikaním vyberte množinu rovnomerne rozložených bodov – všetky pod stredom. Pokračujte pokým sa špirála v pravej časti obrazovky nezačne „významne“ zatačať (sami si definujte, čo znamená „významne“). Konštrukciu možnej dolnej polovice štrbiny zobrazuje nasledujúci obrázok:



Dokončíte dolnú polovicu štrbiny s pridajte množinu bodov nad stredom štrbiny, ktorá je zrkadlovým obrazom dolnej polovice. Tak ste zostrojili „širokú štrbinu“.

Znova pohybujte detektorom hore a dole a porovnajte dĺžky výsledných šípok v rôznych polohách:



Aby ste mohli priamo vidieť rôzne dĺžky výsledných vektorov v pravom okne, stisnite tlačidlá ZMENIŤ NA FARBU (CHANGE TO COLOR) a potom VEĽA DETEKTOROV (MANY DETECTORS).

Otázky:

F3. Vykonajte výpočet obdobný tomu, ktorý bol požadovaný v otázke F1 hore. Aký je pomer dĺžky šípky v detektore na spodku, k tej, v strednom detektore?

F4. Vykonajte výpočet podobný tomu, ktorý bol požadovaný v otázke F2 hore. Aký je pomer pravdepodobností detekcie v tých istých dvoch detektoroch?

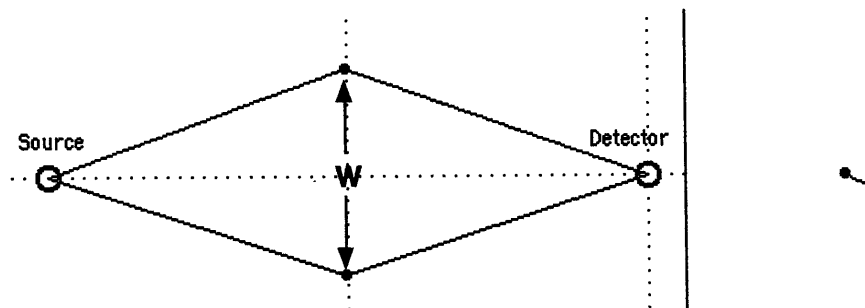
F5. Porovnajte *priebeh* osvetlenia detektorov zo stredu až po koniec obrazovky v prípade úzkej a širokej štrbiny. Porovnajte tvary kriviek osvetlenia pre úzku a širokú štrbinu.

F6. Diskusná otázka: Znovu uvážte námietky, ktoré predložila Rachel (otázka B5) a vysvetlite ako je v neprítomnosti štrbiny možné, že do detektora prichádza maximálne jeden fotón, aj napriek tomu, že tento fotón môže prísť do detektora vyskúšaním nekonečného počtu dráh.

SAMOŠTÚDIUM K ODDIELOM G A H: Feynman, *QED*, Kapitola 3, strany 93 až 98

G. DVOJŠTRBINOVÁ INTERFERENCIA

Kliknite na NOVÝ PRÍPAD (NEW CASE). Vytvorte teraz dve „štrbiny“ tým, že na bodkovanvej zvislej priamke symetricky umiestnite po oboch stranách stredovej priamky dva body:



Umiestnite tieto bodové štrbiny v ľavom okne tak, aby ručičky stopiek v pravom okne ležali približne v jednom smere, t.j. na priamke. NÁVOD: Ak ručička stopiek

naposledy uloženého bodu neleží na priamke s ručičkou stopiek bodu na druhej strane, môžete ho zmazať tak, že na neho znovu kliknete. Ďalším kliknutím nastavíte jeho novú polohu.

Teraz kliknite na tlačidlo PRIDAŤ DETEKTORY (ADD DETECTORS), potom ZMENIŤ NA FARBU (CHANGE TO COLOR) a potom VEĽA DETEKTOROV (MANY DETECTORS). Uvidíte to čo nazývame „dvojštrbinový interferenčný obrazec“

Otázky:

G1. Popíšte interferenčný obrazec, ktorý zaznamená nastavený súbor detektorov.

G2. Experimentujte s rozdielnymi zvislými rozstupmi W medzi „štrbinami“. Ako sa líši interferenčný obrazec od výsledných šípok pre malú vzdialenosť W a pre veľkú vzdialenosť W ? Vaša odpoveď nech je čo najkonkrétnejšia.

H. VIACŠTRBINOVÁ INTERFERENCIA

Pomocou nasledujúcich otázok vyšetríte ako sa prejaví použitie viacerých „štrbín“ na interferenčnom obraze. Na každú „štrbinu“ použite iba jeden stredný bod.

Otázky:

H1. Pozdĺž zvislej bodkovanej čiary, na pol cesty medzi zdrojom a detektorom, skusmo umiestňujte a mažte body, pokým nenájdete na oboch stranách od stredovej priamky taký bod („štrbinu“), pre ktorý je počet otáčok 10,5 (pozri stopky v pravom hornom rohu ľavého okna). Na zobrazenie interferenčného obrazu použite ZMENIŤ NA FARBU (CHANGE TO COLOR) a potom VEĽA DETEKTOROV (MANY DETECTORS). Zmerajte pre tento dvoj štrbinový systém šírku (od nulovej intenzity po nulovú intenzitu) STREDNÉHO maxima. Túto šírku zmerajte na obrazovke vášho počítača vo zvislom smere.

H2. Ďalej umiestnite na zvislú bodkovanú čiaru štyri body, po dva na každej strane od stredovej priamky. Urobte to tak, aby im prislúchali počty otáčok 10,5 a 11,5. Všetky štyri malé hodinové ručičky prislúchajúce strednému detektoru potom ležia v pravom okne približne pozdĺž priamky. Použite tlačidlá ZMENIŤ NA FARBU (CHANGE TO COLOR) a potom VEĽA DETEKTOROV (MANY DETECTORS). Aká je teraz pre tento „štvorštrbinový“ systém šírka (zhora nadol) stredného interferenčného maxima?

H3. Teraz umiestnite na zvislú bodkovanú čiaru šesť bodov, po tri na každej strane od stredovej priamky. Urobte to tak, aby im prislúchali počty otáčok 10,5, 11,5 a 12,5. Aká je teraz pre tento „šesťštrbinový“ systém šírka (zhora nadol) stredného interferenčného maxima?

H4. Čo možno povedať o tom, čo sa deje so šírkou stredného vrcholu, ak sa pridáva čoraz viac a viac štrbín, pričom je každá umiestnená tak, aby dávala jednu celú otáčku stopiek navyše?

KVANTOVÉ STOPKY PRE VOĽNÝ ELEKTRÓN

1. ÚVOD

KONEČNE sme sa dostali k elektrónu. Prečo sa Feynman tak dlho – viac než polovicu svojej malej knihy QED – zaoberal fotónom? Mohlo to mať tieto tri dôvody:

Prvý, emisia a detekcia fotónov je súčasťou nášho každodenného života, takže Feynman môže využiť naše skúsenosti ako zázemie pri predstavovaní kvantového správania.

Druhý, fotóny za bežných podmienok navzájom neinteragujú. Takže milión fotónov (ľahko ich možno vidieť) sa bude správať podľa pravdepodobností vypočítaných pre jeden fotón (ktorý je ťažko vidieť). Naproti tomu sú elektróny nabité a navzájom sa odpudzujú. Zhluk milióna elektrónov vo vákuu sa správa celkom odlišne než jeden elektrón.

Tretí, to čo je zvláštne na správaní fotónov je tiež zvláštne na správaní elektrónov. Skoro KAŽDÝ jav v nezvyčajnom správaní fotónov zodpovedá nejakému javu v správaní elektrónov – vrátane ručičky stopiek, ktorá rotuje, keď elektrón skúma alternatívne dráhy, sčítavania šípok od všetkých dráh, ktoré dáva výslednú šípku a umocňovania dĺžky tejto šípky, z ktorého dostávame pravdepodobnosť detekcie.

Samozrejme, že elektrón sa líši od fotónu. Jednak preto, že elektrón má hmotnosť, zatiaľ čo fotón nie. Ďalší rozdiel je dôsledkom faktu, že elektrón má náboj, a preto sa môže voľne pohybovať len vo vákuu. Navyše kvôli svojmu náboju je elektrón priťahovaný k jadrú a vytvára tak obal atómu. Väčšina elektrónov, s ktorými bezprostredne prichádzame do styku je viazaná v atómoch a molekulách. Jedným z takýchto zhlukov zviazaných elektrónov a jadier je vaše telo!

Lenže ústrednou otázkou zostáva otázka, na ktorú v svojej knižke Feynman neodpovedal:

Ako rýchlo sa otáča ručička kvantových stopiek pre elektrón?

2. KLÚČOM JE FOTÓN

Pre fotón predpokladáme (správne), že odpoveď na túto otázku môžeme prevziať z klasickej teórie svetla: Ručička kvantových stopiek rotuje frekvenciou zodpovedajúcou klasickej vlne. Vyššia klasická frekvencia znamená rýchlejšiu rotáciu ručičky kvantových stopiek. Pre modré svetlo táto ručička rotuje približne dvakrát rýchlejšie než pre červené svetlo.

Elektromagnetickú vlnu môžeme definovať a pozorovať len vtedy, keď zväzok lúčov obsahuje obrovské množstvo fotónov. Kvantové stopky sú ďaleko fundamentálnejšie než klasická vlna. Stopky správne popisujú aj správanie jedného fotónu, zatiaľ čo elektromagnetická vlna nie.

Na rozdiel od fotónu neexistuje žiadna klasická frekvencia, ktorú by sme mohli priradiť elektrónu. V klasickej mechanike, tak ako sa ju zvyčajne učíme, nenachádzame žiadne jednoduché vodičko, ktoré by nás priviedlo k frekvencii, ktorou by sa mali otáčať kvantové stopky elektrónu skúmajúceho všetky dráhy zo zdroja po detektor. Takže sa pokúsime využiť fotón ako príklad pre nájdenie správneho výsledku pre voľný elektrón.

Vráťme sa späť k jednému "kúsku" elektromagnetickej energie – fotónu. Z fotoelektrického javu ako aj z nespočetného množstva iných dôkazov, že kvantovaná energia E fotónu súvisí s frekvenciou f zodpovedajúcej klasickej elektromagnetickej vlny pomocou zmiešaného vzťahu:

$$E = hf \quad (\text{pre fotón – nulová hmotnosť}) \quad (1)$$

Tento vzťah sme nazvali "zmiešaným", pretože kvantovaná energia E na ľavej strane pochádza z kvantovej mechaniky, zatiaľ čo frekvencia f na pravej strane pochádza z klasickej teórie elektromagnetizmu. Pritom h je Planckova konštanta, veličina, ktorá sa objavuje a kričí: "Pozor!", vždy keď opúšťame klasický svet a prechádzame do kvantového sveta. Pre fotón môžeme z rovnice vyjadriť frekvenciu v tvare

$$f = \frac{E}{h} \quad (\text{pre fotón – nulová hmotnosť}) \quad (2)$$

Toto je frekvencia, s ktorou sa otáča ručička kvantových stopiek (počet otočení za sekundu), keď fotón skúma možné dráhy.

3. KVANTOVÉ STOPKY VOĽNÉHO ELEKTRÓNU

Môžeme hovoriť o kvantových stopkách v prípade elektrónu? Ak áno, aká je rýchlosť otáčania ručičky týchto stopiek?

Niekoľko by mohol povedať, že VŠETKA energia fotónu je "kinetická" – keď fotón zastane, tak bol absorbovaný a viacej neexistuje. Preto môžeme vyskúšať vzťah podobný rovnici (2) aj pre VOĽNÝ elektrón, ktorého energia je tiež len kinetická. To znamená, že predpokladáme, že na elektrón nevplyva žiadne elektrické alebo gravitačné pole, resp. žiadna iná sila alebo pole. Potom môžeme písať pre elektrón rovnicu podobnú na rovnicu (2):

$$f = \frac{KE}{h} = \frac{mv^2}{2h} \quad (\text{pre elektrón alebo inú časticu s nenulovou hmotnosťou}) \quad (3)$$

Ukazuje sa, že táto rovnica platí pre rotačnú rýchlosť hodinovej ručičky AKEJKOL'VEK atómovej častice, ktorá má hmotnosť, tak ako napríklad elektrón, protón alebo neutrón. Podľa rovnice (3) boli dokonca správne predpovedané aj výsledky experimentov s celými atómami. VŠIMNITE SI, že frekvencia daná rovnicou (3) rastie s hmotnosťou častice a s DRUHOU MOCNINOU rýchlosti častice.

O1. Elektrón sa pohybuje rýchlosťou jeden meter za sekundu. Akou frekvenciou f sa otáča ručička jeho kvantových stopiek? (Pozri fyzikálne konštanty na vnútornej strane zadného listu obálky tejto cvičebnice)

O2. Lopta s hmotnosťou pol kilogramu sa pohybuje rýchlosťou jeden meter za sekundu. PREDPOKLADAJTE, že môžeme hovoriť o kvantových stopkách aj pre tak veľký objekt a vypočítajte frekvenciu f , s ktorou sa otáča ručička týchto hodín. Koľko krát je to rýchlejšie ako v prípade elektrónu v otázke O1?

O3. Koľko krát rýchlejšie sa otáča ručička kvantových stopiek elektrónu ako ručička stopiek protónu v prípade, že každá z týchto častíc sa pohybuje rovnako rýchlo?

O4. Elektrón sa pohybuje s rýchlosťou v_e . Akou rýchlosťou v_p sa musí pohybovať protón, aby ručička jeho kvantových stopiek rotovala takou istou rýchlosťou ako v prípade elektrónu?

4. CVIČENIA PRE PRÍPAD VOĽNÉHO ELEKTRÓNU VYUŽITÍM PROGRAMU "JEDNA ČASTICA"

4A. ÚVOD

Nasledujúce cvičenia používajú voľbu ELEKTRÓN (ELECTRON) v programe JEDNA ČASTICA (ONEPARTICLE PROGRAM). Pri tomto nastavení sa predpokladá, že čas medzi emisiou a detekciou je rovnaký pre všetky dráhy, aj pre krátke aj pre dlhé. Z tohto dôvodu rýchlosť pozdĺž dráhy nadobúda rôzne hodnoty pre rôzne dráhy. Taktiež je to v prípade kinetickej energie. V princípe rýchlosť aj pre tú istú dráhu by mohla byť pozdĺž jej jednotlivých úsekov rôzna, čím by bola rôzna pre každý úsek aj kinetická energia (Podrobnejšie sa tomu budeme venovať neskôr). Avšak v programe JEDNA ČASTICA (ONEPARTICLE PROGRAM) rýchlosť pozdĺž oboch segmentov danej dráhy bude rovnaká (no táto rýchlosť bude rôzna pre rôzne dráhy).

4B. ÚVODNÁ OBRAZOVKA

OTÁZKY 1 až 5 sa týkajú zobrazenia ÚVOD (INTRODUCTION) v programe JEDNA ČASTICA (ONEPARTICLE PROGRAM) pre voľbu ELEKTRÓN (ELECTRON). Tu je postup ako nastaviť úvod pre elektrón:

- Stlačte tlačidlo PRESKOČIŤ ÚVOD (SKIP INTRODUCTION) alebo, ak ste už v úvode stlačte KONIEC ÚVODU (DONE INTRO).
- V menu ČASTICA (PARTICLE) na vrchu obrazovky vyberte časticu ELEKTRÓN (ELECTRON).

c) Teraz stlačte ZOPAKUJ ÚVOD (REPEAT INTRO).

O5. Porovnávanie dvoch dráh. Skonstruujte priamu dráhu medzi zdrojom a detektorom (stredný bod na priamke medzi zdrojom a detektorom) a druhú dráhu oveľa dlhšiu, so stredným bodom niekde poriadne bokom. Pozrite na obrazovku a rozhodnite: Pre ktorú dráhu sa otáčajú kvantové stopky rýchlejšie, pre dlhšiu alebo kratšiu? (Pamätajte na to, že čas medzi emisiou a detekciou má rovnakú hodnotu pre všetky dráhy)

Otázky O6 až O10 sú otázkami na premýšľanie, odpoveď na ktoré NEDOSTANETE použitím počítača.

O6. Prečo je uhlová rýchlosť stopiek rozdielna? Vysvetlite dôvod vami zistených pozorovaní v O5 pomocou popisu kvantových stopiek elektrónu v oddieli 3.

O7. Špeciálny prípad: porovnanie rýchlostí pre dve dráhy. Predpokladajte, že jedna dráha medzi detektorom a zdrojom je dvakrát dlhšia ako druhá. Ďalej predpokladajte, že rýchlosť pozdĺž oboch častí každej z dráh je konštantná (ale pre tieto dráhy navzájom rôzna). (Pamätajte na to, že čas medzi emisiou a detekciou má rovnakú hodnotu pre všetky dráhy). Aký je pomer rýchlostí pre danú časticu: (rýchlosť na dlhej dráhe)/(rýchlosť na krátkej dráhe)?

O8. Špeciálny prípad: porovnanie kinetických energií. Aký je pomer: (kinetická energia na dlhej dráhe)/(kinetická energia na krátkej dráhe) v prípade opisovanom v O7?

O9. Špeciálny prípad: porovnanie rýchlostí otáčania kvantových stopiek. Aký je pomer: (počet otáčok ručičky stopiek za sekundu na dlhej dráhe)/(počet otáčok ručičky stopiek za sekundu na krátkej dráhe) v prípade opisovanom v O7?

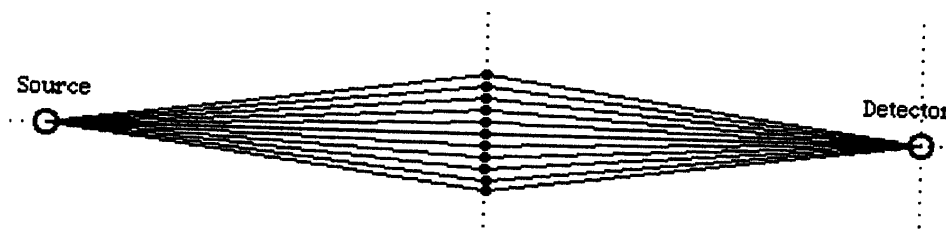
O10. (Nepovinná). Rotácia ručičky stopiek v závislosti na vzdialenosti prekonanej časticou. Aký je pomer: (počet otáčok ručičky stopiek pripadajúcich na jednotku VZDIALENOSTI prejdenej na dlhej dráhe)/(počet otáčok ručičky stopiek pripadajúcich na jednotku VZDIALENOSTI prejdenej na krátkej dráhe) v prípade opisovanom v O7?

4C. HLAVNÁ OBRAZOVKA

OTÁZKY O11 a ďalšie sa týkajú obrazovky vytvorenej po úvode, v ktorom bol zvolený ako častica ELEKTRÓN (ELECTRON) (pozri menu ČASTICA (PARTICLE) na vrchu obrazovky).

Obrázok 1 znázorňuje jedenásť dráh medzi zdrojom a detektorom. Päť z nich prechádza cez body nad vodorovnou priamkou spájajúcou zdroj a detektor. Týchto päť bodov je uložených na jednotlivých bodkách zvislej bodkovanej stredovej

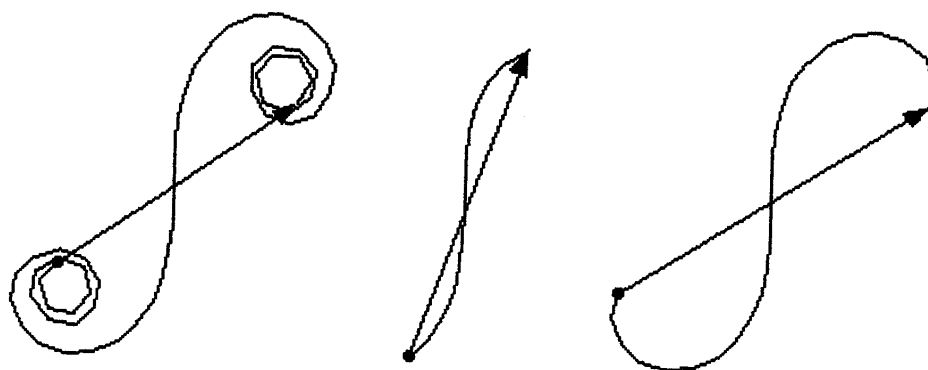
priamky. Ďalších päť bodov je umiestnených na jednotlivých bodkách pod vodorovnou stredovou priamkou. A posledný, jedenásty bod, je NA spomínanej vodorovnej priamke.



Obrázok 1: Takto to vyzerá, keď pozdĺž zvislej bodkovanej priamky naklikáte 5 bodov – po každej strane vodorovnej priamky, ktorá spája zdroj a detektor. Jeden bod navyše sa nachádza NA vodorovnej priamke.

CORNUOVA ŠPIRÁLA

O11. Vytvorte obrázok 1 na počítači, ale teraz poukladajte prostredné body na VŠETKY bodky zvislej bodkovanej priamky, postupne, z vrchu obrazovky nadol. Výsledkom by mala byť Cornuova špirála podobná tej, ktorá je zobrazená v ľavej časti obrázku 2. Kliknite na tlačidlo VÝSLEDNÁ ŠÍPKA (RESULTING ARROW) a pravítkom zmerajte dĺžku výslednej šípky na vašej obrazovke (alebo si ju vyznačte na okraji kúska papiera a zmeriate ju neskôr). Túto hodnotu si zaznačte.



Obrázok 2: VĽAVO: Cornuova špirála a výsledná šípka, ktorá vznikne tým, že na KAŽDÚ bodku zvislej bodkovanej priamky – zhora nadol – umiestnime v programe ONEPARTICLE jeden stredný bod. STRED: Výsledná šípka s približne tou istou dĺžkou, ktorá vznikne, keď po oboch stranách vodorovnej priamky, ktorá spája zdroj a detektor, použijeme len obmedzený počet bodov (podobá sa to na prípad na obrázku 1). VPRAVO: Výsledná šípka s približne rovnakou dĺžkou, keď sa použilo viac stredných bodov. Táto šípka lepšie aproximuje nielen dĺžku výslednej šípky na ľavej strane, ale ukazuje aj skoro tým istým smerom.

O12. Teraz zrekonštruujte obrázok obdobný obrázku 1, ale tentoraz tak, že metódou pokusov a omylov nájdete NAJMENŠÍ počet bodov na oboch stranách od vodorovnej priamej dráhy, pre ktoré bude mať výsledná šípka približne rovnakú dĺžku ako výsledná šípka nameraná v otázke O11. Pri vytváraní si dajte pozor na to, aby ste uložili prostredné body NA bodky zvislej priamky. Zapište počet bodov, ktoré vedú k tomuto výsledku. (Napríklad: V obrázku 1 je po PÄŤ bodov na obidvoch stranách.)

Čo je v tomto prípade naším cieľom? Pokúšame sa napodobniť výslednú šípku ľavej časti obrázku 2 použitím menšieho počtu prostredných bodov. Šípka v strednej časti obrázku 2 síce má približne správnu dĺžku, ale ukazuje v smere značne odlišnom od smeru pôvodnej. Môžeme však našu konštrukciu doplniť tak, aby viedla nielen k rovnakej dĺžke výslednej šípky, ale aj k približne rovnakému smeru výslednej šípky. To dosiahneme pridaním ďalších prostredných bodov nad a pod vodorovnú priamu dráhu, takže Cornuova špirálovitá krivka sa "zvinie trochu viac" tak, ako je to v pravej časti obrázku 2.

O13. Metódou pokusov a omylov nájdite počet bodov na oboch stranách vodorovnej priamej čiary, ktorý vedie k obrázku podobnému pravej časti obrázku 2, kde výsledná šípka má približne tú istú dĺžku ako šípka v otázke O11. Pri vytváraní si dajte pozor na to, aby ste uložili prostredné body NA bodky zvislej priamky. Zaznamenajte počet bodov na obidvoch stranách, ktoré dávajú ten istý výsledok.

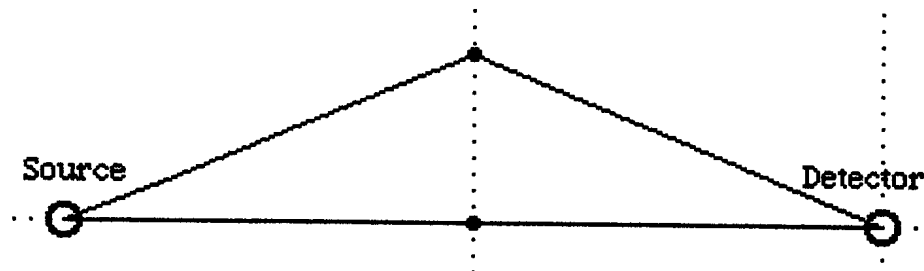
POZNÁMKA: Otázky O11 až O13 sa vám asi zdajú ako cvičenia pre deti z materskej školy. Výsledky sú však *veľmi* dôležité. V O13 ste vytvorili ohraničenú množinu dráh po oboch stranách priamej vodorovnej dráhy medzi zdrojom a detektorom. Táto ohraničená množina dáva v podstate tú istú výslednú šípku ako VŠETKY dráhy, s prostredným bodom na zvislej bodkovej priamke medzi zdrojom a detektorom. Prečo je to tak? Pretože malé šípky od dráh nad a pod našou ohraničenou množinou dráh ukazujú v príliš rôznych smeroch a viac-menej sa navzájom vyrušia. A práve tieto malé šípky, pochádzajúce od dráh po oboch stranách vašej množiny, vytvárajú natesno zvinuté "rolky" na obidvoch koncoch Cornuovej špirály v ľavej časti obrázku 2.

INTERFERENCIA ELEKTRÓNOV

O14. Začnime s priamočiarou dráhou medzi zdrojom a detektorom s prostredným bodom presne v strede. Všimnite si, že priamej dráhe zodpovedá 10 otáčok. Umiestňovaním a mazaním stredných bodov pozdĺž zvislej bodkovej čiary medzi detektorom a zdrojom, nájdite ďalšie body, v ktorých je počet otáčok celé číslo, takže malá ručička hodínok dáva rovnaký smer ako ručička stopiek pre priamu dráhu. Obrázok 2 ukazuje ako by mala vyzeráť obrazovka v začiatkovej fáze vašej práce:

Aký je maximálny počet RÔZNYCH jednobodových "štrbín", ktoré môžete nájsť NAD stredným bodom a ktoré zodpovedajú spomenutému kritériu. Kvôli

určitosti odpovedzte na túto otázku jedným ČÍSLOM v nasledujúcej vete: Okrem strednej dráhy, som našiel maximálne (ČÍSLO) rôznych štrbín NAD strednou dráhou v rozsahu obrazovky, ktoré dávajú ručičky stopiek ukazujúce v tom istom smere ako ručička stopiek strednej dráhy.



Obrázok 2: Hľadanie dráh, ručičky stopiek ktorých ukazujú v detektore tým istým smerom.

O15. Viacštrbinová difrakčná mriežka pre fotón. Zmeňte časticu na červený fotón a odpovedzte na tú istú otázku O14 pre červený fotón.

O16. Počet štrbín pre fotón a elektrón. V prípade pre fotón aj pre elektrón dáva priama dráha približne 10 otáčok. Sú počty štrbín, ktoré ste našli v otázke O14 a O15 pre fotón iné ako pre elektrón? Ak áno, vysvetlite v oboch prípadoch rozdiel pomocou modelu súčtu cez všetky dráhy, ktorý bol v oboch týchto prípadoch použitý.

O17. (Nepovinná). Rozmiestnenie štrbín. "Štrbiny" v prípade interferenčnej mriežky zostrojenej pre elektrón sú vertikálne rozmiestnené nerovnomerne. (To isté platí aj pre zodpovedajúce "štrbiny" pre fotónovú interferenčnú mriežku). Vysvetlite prečo.

PRINCÍP NAJMENŠIEHO ÚČINKU

podľa kapitoly 19, *Feynmanove prednášky 3*
(novšie spracovanie je v materiáli *Princíp najmenšieho účinku interaktívne*)

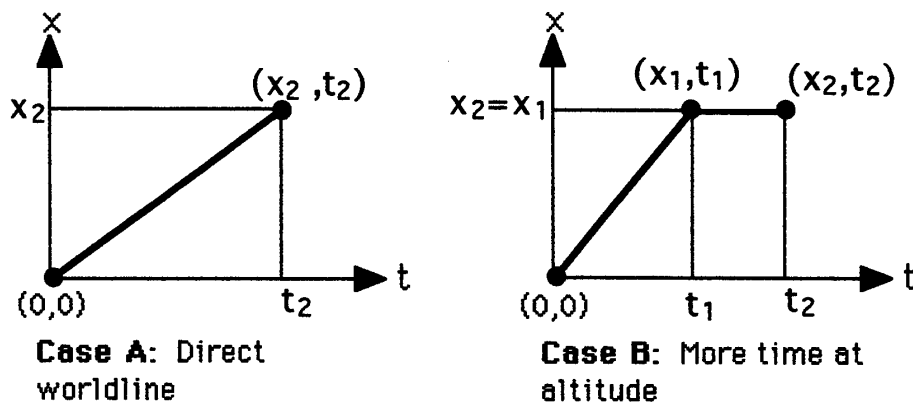
0. SOFTVÉR ÚČINOK

V sade cvičení na účinok budete kombinovať ručné výpočty s používaním počítačového programu s názvom **ÚČINOK (ACTION)**, ktorý umožňuje rýchlejší a viac graficky založený rozbor. Príloha k tomuto celku obsahuje sériu cvičení pre program **ÚČINOK (ACTION)** (pre prípad nulového potenciálu – bez gravitačného poľa), ktorých cieľom je vám pomôcť zvyknúť si na rôzne možnosti tohto programu. Veľmi pravdepodobne vám pomôže, keď si predtým než začnete s cvičeniami v tomto celku (so skratkou O), prejdete cez cvičenia v prílohe (so skratkou Z).

I. ÚVOD

Z princípu najmenšieho účinku možno odvodiť takmer všetko z *klasicknej* nerelativistickej mechaniky pohybu jednej častice. Jednou z vecí, ktorú princíp najmenšieho účinku predpovedá, je pohyb častice v prítomnosti potenciálu, napríklad takého, aký spôsobuje gravitačné pole. Navyše princíp najmenšieho účinku umožňuje prechod od nerelativistickej klasicknej mechaniky ku nerelativistickej kvantovej mechanike.

V tomto cvičení budeme aplikovať *klasický* princíp najmenšieho účinku zjednodušený rozbor pohybu jednokilogramového kameňa pohybujúceho sa zvislo nahor v gravitačnom poli.



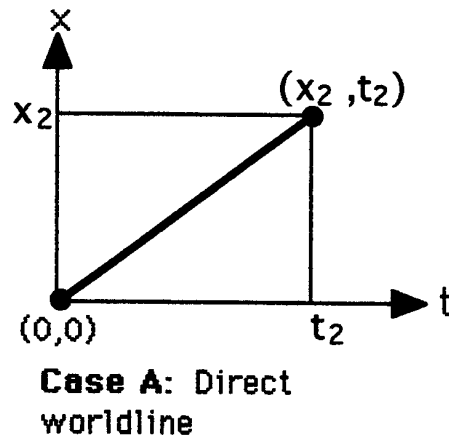
Obrázok 1: Dve možné alternatívne svetočiary medzi udalosťami $(0,0)$ a (x_2, t_2) , ktoré nastávajú v rôznych výškach x v gravitačnom poli.

Obrázok 1 zobrazuje diagram dvoch možných, alternatívnych dráh kameňa v gravitačnom poli, ktoré pôsobí smerom nadol. O týchto pohyboch je potrebné povedať niekoľko dôležitých vecí:

1. Pohyb v *priestore* je jednorozmerný; Kameň sa pohybuje zvislo nahor. Feynman používa x ako zvislú priestorovú súradnicu. Väčšina z nás by použila pre tento účel pravdepodobne premennú y .
2. Diagramy na obrázku 1 sú tzv. *priestoročasové* diagramy, s časom vyznačeným pozdĺž vodorovnej osi. Dráha kameňa ktorá je vyznačená v priestoročasovom diagrame sa nazýva *svetočiara*. Svetočiara NIE JE dráhou v priestore, ale správnejšie povedané zobrazením polohy ako funkcie času. Svetočiara nám o pohybe povie omnoho viac než fotografia, na ktorej je zobrazená samotná trajektória v priestore. Totiž sklon (v matematike smernica) svetočiar nám udáva rýchlosť kameňa v každom bode jeho pohybu. Pozdĺž každého priameho úseku svetočiar na obrázku 1, sa kameň pohybuje s konštantnou rýchlosťou a tým aj konštantou kinetickou energiou.
3. Bod v priestoročasovom diagrame nám udáva nielen polohu kameňa v priestore, ale tiež aj čas v ktorom túto polohu dosiahol. Takýto priestoročasový bod sa nazýva *udalosť*.
4. Opisy oboch pohybov na obrázku 1 vyzerajú nasledovne:
Prípad A: Kameň štartuje v počiatku a stúpa s konštantnou rýchlosťou do výšky x_2 .
Prípad B: Kameň štartuje v počiatku a stúpa s konštantnou rýchlosťou väčšou než v prípade A, pričom prichádza do výšky $x_1 = x_2$ skôr, kde sa zastaví a zvyšok času stojí.
5. Ani jeden z týchto pohybov nie je reálnym, prirodzeným pohybom kameňa, ktorý letí v gravitačnom poli. Pre tieto neprirodzené dráhy však nie je ťažké vypočítať účinok, takže ich použijeme na to, aby sme sa s touto veličinou oboznámili.
6. Pre svetočiary, ako sú tie na obrázku 1, je typické, že sa pozdĺž nich *nezachováva* energia. Kinetická energia kameňa stúpajúceho nahor s konštantnou rýchlosťou je konštantná, no jeho potenciálna energia rastie. Z tohto dôvodu celková energia pozdĺž časti svetočiar zodpovedajúcej tomuto pohybu rastie. Energia sa zachováva iba pre správnu, skutočnú, "prirodzenú" dráhu, po ktorej sa kameň pohybuje.

II. ÚČINOK PRE PRÍPAD A

Nájdeme výraz pre účinok v prípade A.



Obrázok 2: Priama svetočiara, ktorá začína v počiatku.

Formálna definícia *účinku* je uvedená vo Feynmanových prednáškach III, kapitola 19, na strane 417:

$$\text{účinek} = S = \int_{t_1}^{t_2} (KE - PE) dt = \int_{t_1}^{t_2} KE dt - \int_{t_1}^{t_2} PE dt \quad (1)$$

kde t_1 a t_2 sú časy počiatočnej a koncovnej udalosti. V prípade A čas $t_1 = 0$:

$$\text{účinek} = S = \int_0^{t_2} (KE - PE) dt = \int_0^{t_2} KE dt - \int_0^{t_2} PE dt \quad (2)$$

Tieto integrály, ako všetky integrály, sú signálom toho, že sa niečo *sčítava*. V prípade prvého integrálu na pravej strane rovnice (2), súčet sčítava dohromady mnoho malých príspevkov $KE dt$. Na každom krátkom časovom intervale vynásobíte kinetickú energiu KE dĺžkou tohoto časového intervalu dt a všetky takto získané malé súčiny sčítajte dokopy. Výsledok je aproximáciou integrálu:

$$\int_0^{t_2} KE dt \approx (KE_a dt_a + KE_b dt_b + KE_c dt_c + \dots) \quad (3)$$

Prípad A zobrazuje priamy úsek svetočiary s konštantným *sklonom* (smernicou), ktorý znamená konštantnú *rýchlosť* pozdĺž tohto úseku. Dôsledkom toho je konštantná *kinetická energia* pozdĺž tohto priameho úseku. Takže pozdĺž tohto úseku svetočiary možno konštantnú kinetickú energiu, označenú KE , na pravej strane rovnice (3), vyňať pred zátvorku. To, čo zostane v zátvorke, je jednoducho súčet malých časových úsekov medzi $t = 0$ a $t = t_2$. Tento súčet sa presne rovná času t_2 :

$$\int_0^{t_2} KE dt \approx KE(dt_a + dt_b + dt_c + \dots) = KEt_2 \quad (\text{priama svetočiara}) \quad (4)$$

Toto je presný výraz pre prvý integrál na pravej strane rovnice (2), v prípade priamej svetočiary.

Príspevok od potenciálnej energie k účinku, druhý integrál na pravej strane rovnice (2), je skoro rovnako jednoduchý. Skoro! Potenciálna energia má tvar:

$$PE = mgx \quad (5)$$

kde m je hmotnosť kameňa, g je gravitačné zrýchlenie a x je výška kameňa nad zemou. PE -integrál v rovnici (2) zodpovedá sumácii:

$$\int_0^{t_2} PE dt \approx mg(x_a dt_a + x_b dt_b + x_c dt_c + \dots) \quad (6)$$

Nikto nám nemôže zabrániť v tom, aby sme zobrali všetky časové intervaly dt rovnaké:

$$\int_0^{t_2} PE dt \approx mg(x_a dt + x_b dt + x_c dt + \dots) = mg(x_a + x_b + x_c + \dots)dt \quad (7)$$

Teraz predpokladajme, že časový interval t_2 je rozdelený na N rovnakých úsekov veľkosti dt . Potom môžeme písať:

$$dt = \frac{t_2}{N} \quad (8)$$

Dosaďte tento výraz do rovnice (7) a urobte šikovník ťah spočívajúci v tom, že premiestnite N pod súčet x -ových členov:

$$\int_0^{t_2} PE dt \approx mg \left[\frac{x_a + x_b + x_c + \dots}{N} \right] t_2 \quad (9)$$

Výraz v hranatých zátvorkách má jednoduchú interpretáciu. Čitateľ zlomku je súčet hodnôt x v N rovnako vzdialených polohách pozdĺž úseku svetočiary. Delenie tohto čitateľa číslom N dáva výsledok, ktorý aproximuje *priemernú hodnotu* x pozdĺž tohto úseku. Avšak úsekom je úsečka, takže priemerná hodnota x je presne hodnota zodpovedajúca jej stredu:

$$\left[\frac{x_a + x_b + x_c + \dots}{N} \right] = \frac{x_2}{2} \quad (10)$$

S použitím tejto substitúcie, rovnica (9) prechádza na tvar:

$$\int_0^{t_2} PE dt \approx mg \frac{x_2}{2} t_2 = PE_p t_2, \quad (11)$$

kde PE_p je priemerná potenciálna energia pozdĺž svetočiary prípadu A.

Znova zdôraznime, že rovnica (11) dáva presný výsledok pre priamu svetočiaru.

Takže pre priamy úsek svetočiary z bodu (0,0) do bodu (x_2, t_2) má Účinok hodnotu:

$$\text{účinek} = S = \int_0^{t_2} (KE - PE) dt = (KE - PE_p) t_2 \quad (\text{Prípad A}) \quad (12)$$

Alebo vo vyjadrení pomocou koncových bodov svetočiary:

$$\text{účinek} = S = \frac{1}{2} m \left(\frac{x_2}{t_2} \right)^2 t_2 - mg \frac{x_2}{2} t_2 \quad (\text{Prípad A}) \quad (13)$$

Tu sú prvé cvičenia:

O1. V prípade A pomocou kalkulačky nájdite číselnú hodnotu S (pre prípad $m = 1\text{kg}$) pre dané konkrétne hodnoty:

$$x_2 = 25 \text{ metrov}$$

$$t_2 = 7,5 \text{ sekundy}$$

O2. Nastavením tej istej priamej svetočiary v softvéri ÚČINOK (ACTION) skontrolujte svoju odpoveď na otázku O1. (Predtým ako skúsíte odpovedať na túto otázku, si možno budete chcieť urobiť úvodné cvičenia v prílohe.)

POZNÁMKA č.1: Pomocou menu POTENCIÁL (POTENTIAL) na vrchu obrazovky, ktoré sa objaví po stlačení tlačidla NOVÝ PRÍPAD (NEW CASE), musíte nastaviť GRAVITAČNÝ POTENCIÁL (GRAVITY POTENTIAL).

POZNÁMKA č.2: Sústreďte svoju pozornosť na mierky zvislej a vodorovnej osi, ktoré sú označené zvláštnym spôsobom.

POZNÁMKA č.3: Kvôli ľahšiemu správne umiestneniu bodov-udalostí, vyskúšajte rôzne voľby v menu MRIEŽKA (GRID).

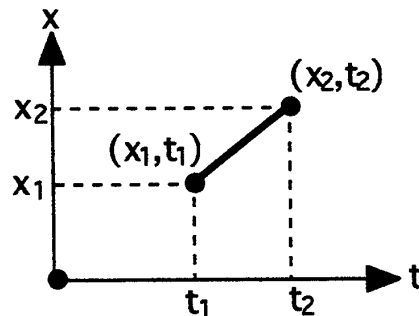
POZNÁMKA č.4: V menu KRAJNÉ BODY (ENDPOINTS) vyberte prípad GRAVITÁCIA (GRAVITY), aby ste hore spomenuté krajné body mohli vložiť priamo. Alebo môžete to isté nastaviť číselne výberom položky ČÍSELNÝ VSTUP (DIGITAL ENTRY).

POZNÁMKA č.5: Hodnoty účinku S pochádzajúce z odpovedí na otázky O sú v tomto oddieli ZÁPORNÉ čísla. Účinok totiž môže byť záporné číslo a NAJMENŠÍ účinok môže predstavovať NAJMENŠIE ZÁPORNÉ ČÍSLO (pozri obrázok!). Napríklad: $S = -1234$ má nižšiu hodnotu ako $S = -900$.

POZNÁMKA č.6: Nezláknite sa, ak softvér ÚČINOK (ACTION) nedáva presne to isté číslo ako vaša vypočítaná hodnota. Softvér ÚČINOK (ACTION) zachováva presnosť len na niekoľko percent.

III. ZOVŠEOBECNENIE: ÚČINOK V PRÍPADO PRIAMEHO ÚSEKU SVETOČIARY

Teraz urobíme dôležité zjednodušenie. Každú svetočiaru nahradíme množstvom priamych úsekov. Takto môže počítač ľahko vypočítať účinok pre každý priamy úsek, a potom, aby získal celkový účinok, sčítať účinky všetkých úsekov. Jeden taký priamy úsek je zobrazený na obrázku 3:



Obrázok 3: Priamy úsek svetočiary vo všeobecnom prípade.

Odvedenie účinku pre tento priamy úsek je jednoduchým rozšírením prípadu A. Kinetická energia závisí len od sklonu (smernice) priameho úseku svetočiary, takže čo sa týka príspevku KE k účinku, nezáleží kde sa úsek v xt -diagrame nachádza. Výsledok pre prípad A teda môžeme jednoducho aplikovať na všeobecný prípad. Rozdiel bude iba v tom, že časový interval zodpovedajúci úseku bude $(t_2 - t_1)$ ako je to uvidíme neskôr v rovnici (15).

Tak ako predtým aj teraz zvládneme príspevok od potenciálnej energie skoro rovnako ľahko – no nie celkom. Hladinu nulovej potenciálnej energie si môžeme zvoliť kdekoľvek. V prípade homogénneho gravitačného poľa, môžeme zvoliť nulovú potenciálnu energiu na povrchu zeme, na druhom poschodí alebo na povrchu stola na druhom poschodí. Rôzne voľby jednoducho pričítavajú alebo odčítavajú konštantný potenciál, čo nemá vplyv na predpovede o výslednom pohybe. Keď zmeníme počiatok x z obrázka 2 na taký, aký je na obrázku 3, vzrastie potenciál všetkých bodov daného úseku svetočiary. Avšak priemerná hodnota PE sa stále vypočíta pomocou priemernej hodnoty výšky, ktorá je teraz daná výrazom: $(x_1 + x_2)/2$.

Pomocou týchto jednoduchých posuvov sa rovnice (12) a (13) zmenia na rovnice (15) a (16):

$$\text{účinek} = S = \int_{t_1}^{t_2} (KE - PE) dt = (KE - PE_p)(t_2 - t_1), \quad (\text{priamy úsek}) \quad (15)$$

alebo

$$\text{účinko} = S = \frac{1}{2} m \left(\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \right)^2 (t_2 - t_1) - mg \frac{(x_2 + x_1)}{2} (t_2 - t_1) \quad (\text{priamy úsek}) \quad (16)$$

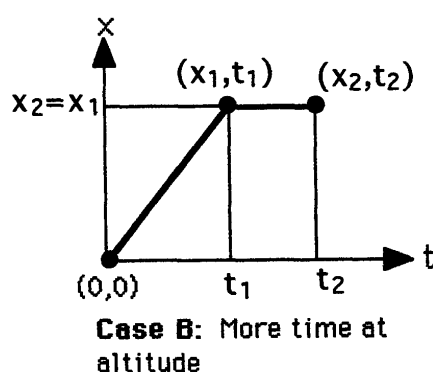
Z tvaru rovnice (16) ľahko vidieť, odkiaľ pochádza každý z jej členov. Avšak pre výpočtové účely, ju bude vhodnejšie trochu algebraicky zjednodušiť :

$$\text{účinko} = S = \frac{1}{2} m \left[\left(\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \right)^2 (t_2 - t_1) - g(x_2 + x_1)(t_2 - t_1) \right] \quad (\text{priamy úsek}) \quad (17)$$

Program ÚČINOK (ACTION) používa na výpočet účinku pozdĺž každého úseku svetočiary, ktorý zostrojíte medzi počiatočnou a koncovou udalosťou, rovnicu (17) s $m = 1\text{kg}$.

IV. Prípad B: DLHŠIE VO VÝŠKE

Teraz je rad na Vás. Prípad A je veľmi nerealistický. Urobte ďalší krok ku skutočnosti. Nájdite výraz pre celkový účinok pozdĺž *trocha* realistickejšej dráhy zloženej z dvoch úsekov a zobrazenej ako prípad B na obrázku 1 a ešte raz na obrázku 4.



Obrázok 4: Dvojúseková svetočiara, ktorá spája ten istý počiatočný a koncový bod ako v prípade A na obrázku 1.

Čo sa týka postupu pri riešení, môžete odpovedať postupne na nasledujúce otázky alebo postupujte po svojom a svoje výsledky zapíšte.

O3. Použite výsledok z prípadu A pre kratší čas t_1 , čím nájdete hodnotu účinku pre prvý úsek, stúpajúcu časť svetočiary v prípade B. Aký tvar má algebraický výraz pre účinok pozdĺž tohto prvého, stúpajúceho úseku? Tento komplikovaný výraz NEMUSÍTE odovzdať. Namiesto toho, pomocou kalkulačky zistíte hodnotu pozdĺž prvého úseku využitím hodnôt daných v rovnici (14) plus hodnoty:

$$t_1=5 \text{ sekúnd.} \quad (18)$$

Odvzdajte svoj číselný výsledok.

O4. Svoj číselný výsledok z predchádzajúcej otázky teraz skontrolujte pomocou programu ÚČINOK (ACTION). Urobíte to tak, že nájdete hodnotu S pozdĺž prvého, stúpajúceho úseku v prípade B. (V tomto prípade máme len ľavý bod v $(0,0)$ a pravý bod v...?) Číselnú hodnotu získanú pomocou programu zapíšte.

Poznámka: Vo výsledkoch zistíte veľké odchýlky, ktoré závisia od presného umiestnenia bodov na oboch koncoch. Je to spôsobené tým, že kinetická a potenciálna energia sa pozdĺž tohto úseku veľmi nelíšia, takže pri malej zmene KE sa značne zmení $(KE - PE)$. Túto odchýlku môžete minimalizovať voľbou ČÍSELNÝ VSTUP (DIGITAL ENTRY) v menu KRAJNÉ BODY (ENDPOINTS).

O5. Zo všeobecného výsledku pre priamy úsek (rovnica 17) pomocou kalkulačky nájdite číselnú hodnotu pre účinok pozdĺž druhého, vodorovného úseku svetočiary na obrázku 4.

O6. Svoj číselný výsledok z otázky O5 teraz skontrolujte pomocou programu ÚČINOK (ACTION). Urobíte to tak, že nájdete hodnotu S pozdĺž druhého, vodorovného úseku v prípade B. (V tomto prípade máme iba ľavý bod v (x_1, t_1) a pravý bod v...?) Číselnú hodnotu získanú pomocou programu zapíšte.

O7. Teraz začnite ešte raz, a použite program na nakreslenie úplnej dvojúsekovej svetočiary zobrazenej na obrázku 4 pre body popísané v rovniciach (14) a (18). (POMÔCKA: Ako prvé umiestnite krajné body.) Z programu zistíte CELKOVÝ účinok zodpovedajúci tejto svetočiare a porovnajte túto celkovú hodnotu s číslami získanými pre jednotlivé úseky v otázkach O3 až O6.

O8. Teraz kliknite na tlačidlo ZMENA NA "POHYBVÉ BODY" (CHANGE TO "MOVE DOTS") a pohybujte prostredným bodom–udalosťou hore a dole. Určte minimálnu hodnotu účinku pre túto dvojúsekovú svetočiaru. Zapíšte túto minimálnu hodnotu účinku a porovnajte ju s hodnotou účinku pre jednoúsekovú svetočiaru rozoberanú v oddieli II.

V. EŠTE VŠEOBECNEJŠÍ PRÍPAD

Začína to byť únavné. Na únavnú prácu boli vymyslené počítače. Program ÚČINOK (ACTION) vám pomôže vypočítať účinok medzi dvoma udalosťami pozdĺž svetočiary s toľkými úsekmi, koľko len budete chcieť. V predchádzajúcej stati III je odvodený algebraický výraz, ktorý počítač používa pre každý úsek svetočiary.

O9. V programe ÚČINOK (ACTION) nastavte ten istý počiatočný a koncový bod ako v prípadoch A a B. (Počiatočný bod v (0,0), koncový bod s polohou 25 metrov a časom 7,5 sekúnd). Vložte DVA prostredné body, rovnomerne rozložené, v časoch 2,5 s a 5 s. Kliknite na tlačidlo ZMENA NA "POHYBLIVÉ BODY" (CHANGE TO "MOVE DOTS"), a potom *tahajte* za tieto prostredné body HORE a DOLE (nie zľava doprava), aby ste našli minimálnu hodnotu účinku. Zapíšte túto numerickú hodnotu.

O10. Teraz kliknite na ZMENA NA "PRIDÁVANIE BODOV" (CHANGE TO "ADD DOTS") a pridajte pozdĺž tejto svetočiary viacero prostredných bodov. Teraz znova kliknite na ZMENA NA "POHYBLIVÉ" BODY (CHANGE TO "MOVE" DOTS) a použite menu HĽADANIE MINIMA (HUNTING MINIMUM) na vrchu obrazovky k ZVISLÉMU HĽADANIU (HUNT VERTICAL) svetočiary s minimálnym účinkom. Zapíšte si hodnotu tohto minimálneho účinku.

O11. Zachováva sa energia (aspoň približne) pozdĺž svetočiary s viacerými bodmi z otázky O10? Ťahajte jedným z bodov hore a dole. Čo sa deje s hodnotou celkovej energie pre jednotlivé úseky po obidvoch stranách pohybujúceho sa bodu? **Poznámka:** Pod **zachovaním energie** rozumieme to, že na každom úseku budú rovnaké hodnoty celkovej energie. Práve ste ukázali, že zachovanie energie je prirodzeným dôsledkom princípu najmenšieho účinku.

PRÍLOHA: ÚVOD K PROGRAMU ÚČINOK (ACTION)

Cieľom nasledujúcich cvičení je vás zoznámiť so softvérom ÚČINOK (ACTION).

V týchto cvičeniach neuvažujeme žiadne gravitačné pole. Častica sa pohybuje v inerciálnej vzťažnej sústave (ako v orbitálnej stanici MIR obiehajúcej okolo Zeme)

POZNÁMKA č.1: Väčšina ponúk (tzv. menu) uvedených nižšie sa objaví v hornej časti obrazovky iba po stlačení tlačidla NOVÝ PRÍPAD (NEW CASE).

POZNÁMKA č.2: V menu PÔVODNÉ NASTAVENIE (DEFAULT) vyberte PÔVODNÉ MAKRO NASTAVENIE (MACRO DEFAULT). Je to nastavenie pre účinok v klasickej mechanike.

POZNÁMKA č.3: Nastavenie smeru pre časovú os je vodorovné, tak isto ako vo Feynmanových prednáškach. Ak to potrebujete zmeniť, použite menu ČASOVÁ OS (TIME AXIS).

Použite softvér ÚČINOK (ACTION) a pomocou neho zistíte odpovede na nasledujúce otázky pre hmotnosť jeden kilogram.

Umiestnite krajné body v polohách (priestor = 0, čas = 0) a (priestor = 100 metrov, čas = 0 sekúnd). POZNÁMKA: Priestor a čas sú označené zvláštnym spôsobom.

Z1. Aká je hodnota účinku S pozdĺž priamej svetočiary medzi týmito udalosťami? (Pozri zobrazenie dole na obrazovke)

Z2. Aká je kinetická energia KE častice pozdĺž tejto svetočiary? (Pozri zobrazenie vpravo).

Z3. Aká je hodnota účinku S pozdĺž dvojúsekovej svetočiary, ktorá začína v bode (priestor = 0, čas = 0) pokračuje do bodu (priestor = 75 metrov, čas = 5 sekúnd) a končí v bode (priestor = 0, čas = 10 sekúnd)?
POMÔCKA: Ako prvé umiestnite krajné body.

Z4. Zachováva sa (približne) energia pozdĺž tejto dvojúsekovej svetočiary?

Teraz kliknite na tlačidlo ZMENA NA "POHYBLIVÉ BODY" (CHANGE TO "MOVE DOTS") a aby ste našli minimum účinku $S_{\min}$ (dole na obrazovke), ťahajte za prostredný bod hore a dole. Kliknite na tlačidlá, ktoré dovoľujú ťahať vľavo a vpravo, a taktiež hore a dole. POZNÁMKA: V spodnej časti obrazovky sú zobrazené hodnoty účinku S a minima $S_{\min}$ určeného z doterajších polôh prostredných bodov alebo bodu. Pomôže vám to nájsť minimálnu hodnotu, keď budete ťahať bodom (bodmi) v rôznych smeroch.

Z5. Aká je hodnota tohto minimálneho účinku $S_{\min}$?

Z6. Zachováva sa (približne) energia pozdĺž dvojúsekovej svetočiary minimálneho účinku?

Z7. Teraz kliknite na ZMENA NA "PRIDÁVANIE BODOV" (CHANGE TO "ADD DOTS") a pridajte pozdĺž tejto svetočiary viacero prostredných bodov. Teraz znova kliknite na ZMENA NA "POHYBLIVÉ BODY" (CHANGE TO "MOVE DOTS") a použite menu POĽOVAČKA NA MINIMUM (HUNTING MINIMUM) na vrchu obrazovky, aby došlo k automatickému nájdaniu svetočiary s minimálnym účinkom.

Z8. Zachováva sa (približne) energia pozdĺž tejto svetočiary s minimálnym účinkom?

UVOLNITE SA!

Hrajte sa s ponukami na vrchu obrazovky, ktoré sa objavajú, keď stlačíte NOVÝ PRÍPAD (NEW CASE). Konkrétne, naučte sa ako zmeniť potenciál a ako umiestniť body číselným zadáním. (Všimnite si, že umiestnenie krajných bodov pomocou čísel, môže zahŕňať extrémne hodnoty, také ako je 0 a 100, a že program prijme čísla s presnosťou dvoch číslic za desatinnou čiarkou, také ako 12,34.)

ELEKTRÓN V PRÍTOMNOSTI POTENCIÁLU

1. ROTÁCIA RUČIČKY STOPIEK PRE ELEKTRÓN V PRÍTOMNOSTI POTENCIÁLU

Pre fotón sme zistili, že ručička kvantových stopiek rotuje s frekvenciou f danou rovnicou:

$$f = \frac{E}{h} \quad (\text{pre fotón — nulová hmotnosť}) \quad (1)$$

Toto je frekvencia, s ktorou rotuje ručička stopiek (počet otočení za sekundu), keď fotón skúma alternatívne dráhy.

Pre voľný elektrón (elektrón, ktorý nie je pod vplyvom žiadnych síl a potenciálov) sme postulovali, že ručička kvantových stopiek sa otáča frekvenciou:

$$f = \frac{KE}{h} \quad (\text{pre voľný elektrón}) \quad (2)$$

KE je tu kinetická energia elektrónu. Predpokladajme teraz, že elektrón má potenciálnu energiu, spôsobenú pravdepodobne vplyvom elektrickej príťažlivosti kladne nabitého jadra. Čo treba urobiť s kinetickou a potenciálnou energiou, aby sme získali frekvenciu rotácie ručičky kvantových stopiek elektrónu, keď skúma nejakú dráhu v takomto potenciáli? Láka nás použiť rovnicu (2) aj na tento prípad, s tým, že kinetickú energiu KE zameníme celkovou energiou E , ktorá sa rovná súčtu kinetickej a potenciálnej energie: $E = KE + PE$.

CHYBA!

Prečo je to zle? Pretože, keby sme frekvenciu elektrónu f chceli vypočítať podľa vzorca $f = E/h$, kde by sme za E dosadili celkovú energiu elektrónu, minimálny počet rotácii by vykazovali dráhy, pre ktoré, je potenciálna energia PE nízka, a teda je nízka aj ich celková energia a tým pádom aj frekvencia. Medzi nahadzovačom a chytačom¹ (hrajúcimi vo vákuu!) by vyhodенý elektrón klesal (znižovanie potenciálnej energie a spomaľovanie jeho kvantových stopiek) a potom stúpал nahor, aby dosiahol fixované umiestnenie chytačovej lapačky. Tým, že by hodený elektrón klesal a potom stúpал, by znížil svoju potenciálnu energiu a minimalizovať počet otáčok svojich kvantových stopiek. Ale to by bolo absurdné. Bola by to antigravitácia? Nemožné! S takýmto ZLÝM výberom frekvencie by kvantová fyzika neprechádzala plynulo na klasickú mechaniku, keď by sme nechali hmotnosť častice vzrastať z tej zodpovedajúcej elektrónu po tú, čo má baseballová loptička. Takže je NESPRÁVNE, ak pri výpočte rotačnej rýchlosti ručičky kvantovej stopiek elektrónu skúmajúceho dráhy použijeme SÚČET KE a PE .

¹ Nahadzovač, chytač a odpaľovač sú hlavní aktéri jednej z najpopulárnejších hier v USA, v baseballe.

Lenže my vieme ako vyzerá dráha baseballovej loptičky. Poznáme veličinu, ktorá má na klasickej dráhe minimum. Baseballová loptička sa pohybuje tak, aby bol účinok medzi fixovanými udalosťami nahodenia a chytenia minimálny - ako je to popísané vo Feynmanovej prednáške Princíp najmenšieho účinku, kapitola 19, *Feynmanove prednášky z fyziky* 3. a v predchádzajúcom oddieli tejto cvičebnice nazvanom „Princíp najmenšieho účinku“. Z princípu najmenšieho účinku možno odvodiť TAKMER VŠETKO z klasickej nerelativistickej mechaniky pohybu jednej častice. V rámci tohto princípu spočítavame príspevky od výrazu $KE - PE$ cez všetky časy, so znamienkom MÍNUS pred potenciálnou energiou.

Ukazuje sa, že pri kvantovom popise treba jednoducho prispôbiť výraz $KE - PE$, ktorý sčítavame cez čas na základe čoho dostávame klasický účinok.

Rýchlosť rotácie (v obrátkach za sekundu) ručičky kvantových stopiek pre elektrón skúmajúci dráhu (pri rýchlostiach omnoho menších ako je rýchlosť svetla) je:

$$f = \frac{KE - PE}{h} \quad (\text{pre elektrón}) \quad (3)$$

Počet otáčok pozdĺž svetočiary nájdeme pomocou sčítavania: Malému časovému intervalu dt , zodpovedá počet otáčok (resp. časť otáčky) $f dt = (KE - PE)dt/h$.

Toto sčítame pre všetky časové okamihy pozdĺž svetočiary:

$$\left(\begin{array}{c} \text{počet otáčok} \\ \text{pozdĺž svetočiary} \end{array} \right) = \frac{\int_{\text{pozdĺž svetočiary}} (KE - PE)dt}{h} \quad (4)$$

Avšak čitateľ na pravej strane (4) je jednoducho účinok S (definovaný rovnicou (1) v predchádzajúcom oddieli o princípe najmenšieho účinku). Preto počet otáčok pozdĺž svetočiary je práve:

$$\left(\begin{array}{c} \text{počet otáčok} \\ \text{pozdĺž svetočiary} \end{array} \right) = \frac{\left(\begin{array}{c} \text{účinnok pozdĺž} \\ \text{tejto svetočiary} \end{array} \right)}{h} = \frac{S}{h} \quad (\text{pre elektrón}) \quad (5)$$

Keď sa pozrieme na rovnice (4) a (5), vidíme, že počet otáčok medzi nahadzovačom a chytačom môžeme minimalizovať tak, že zvýšime PE , čím znížime frekvenciu ručičky kvantových stopiek – keďže PE vstupuje do týchto rovníc so znamienkom mínus. Zvýšte PE tak, že zdvihnete dráhu. Avšak dráha nemôže ísť príliš vysoko, pretože potom by sa kinetická energia musela zvýšiť, lebo elektrón, aby stihol fixované stretnutie s lapačkou chytača, by sa musel pozdĺž dlhšej dráhy viac

poponáhľať. (Obidve udalosti „nahodenie“ (emisie) a „chytenie“ (detekcia) sú fixované tak v kvantovom ako i v klasickom popise). Skutočná dráha je kompromisom medzi rastom PE , (ktorý znižuje frekvenciu f) a rastom KE (ktorý zvyšuje f). Najväčší príspevok k výslednej šípke pre detekciu elektrónu vo vákuu potom pochádza od tých trajektórií, ktoré sú v zvislom homogénnom gravitačnom poli blízko klasickej dráhy pohybu po parabole. S rastúcou hmotnosťou prechádza dráha elektrónu s minimálnym počtom otáčok ručičky kvantových stopiek plynulo na dráhu baseballovej loptičky s minimálnym účinkom. *Objavili sme rozhodujúce spojenie medzi klasickou a kvantovou mechanikou.*

V skutočnosti sme však objavili niečo omnoho dôležitejšie: *Našli sme kvantovomechanický základ pre väčšinu javov klasickej mechaniky.* Klasická mechanika nemá odpoveď na otázku: „PREČO sa častica v prítomnosti potenciálu (aj bez) pohybuje po dráhe určenej princípom najmenšieho účinku?“. Odpoveď – platná pre oba svety, kvantový aj klasický – znie: „Pretože táto dráha minimalizuje počet otáčok ručičky kvantových stopiek“.

Takže, aký je ROZDIEL medzi kvantovým a klasickým svetom? Odpoveď, ako zvyčajne, je obsiahnutá v Planckovej konštante h v *menovateľoch* pravých strán rovníc (3) až (5) – a v hmotnosti m častice, ktorá je skrytá v *čitateli*och. Elektrón má najmenšiu hmotnosť zo všetkých stabilných častíc, ktoré poznáme. Malá hmotnosť v čitateli v (3) „vyvažuje“ nepatrnú hodnotu h v menovateli. Výsledná frekvencia f (podiel čitateľa a menovateľa) môže byť tak nízka, že celkové počty otáčok pozdĺž blízkych dráh sa veľmi nelíšia. Trocha iná dráha môže mať počet otáčok povedzme o jednu osminu otáčky viac než dráha s minimálnym celkovým počtom otáčok. Potom, ak chcete vypočítať výslednú šípku, musíte započítať aj príspevok pre túto dráhu, spolu s ďalšími. Elektrón „oňucháva „ „rozmazanú“ množinu dráh okolo dráhy s minimálnym počtom otáčok. A práve toto *rozumieme* pod kvantovým správaním!

Naproti tomu, v prípade veľkej hmotnosti v čitateli v rovniciach (3) a (5) – napríklad keď ide o baseballovú loptičku – nepatrná hodnota h v menovateli zapríčiní *extrémne* vysokú frekvenciu f . V tomto prípade bude trocha inej dráhe zodpovedať celkový počet otáčok o stovky otáčok väčší než dráhe s minimálnym počtom otáčok. V tomto prípade majú príspevky zo všetkých blízkych dráh sklon vyrušiť sa. V limite veľkej hmotnosti, môžeme uvažovať len jednu dráhu s minimálnym počtom otáčok, dráhu, ktorú predpovedá princíp najmenšieho účinku. Vyzerá to tak, že sa baseballová loptička pohybuje po jednej dráhe; tomuto *hovoríme* klasické správanie!

Elektrón môže tiež skúmať všetky dráhy vo vnútri atómu alebo molekuly. V tomto prípade náboj jadra poskytuje potenciálnu energiu, ktorá ovplyvňuje rýchlosť rotácie ručičky stopiek pre elektrón. Rôzne vzdialenosti od jadra – rôzne frekvencie. Ako

elektrón skúma oblasti rôznej potenciálnej energie PE pozdĺž každej dráhy, frekvencia otáčok sa mení. Tento jednoduchý výklad je komplikovaný spinom a prítomnosťou ďalších elektrónov v atóme alebo molekule. Nemysleli ste si, že by sme *naozaj* mohli obsiahnuť všetko z chémie, však?

2. TOTO ŽE JE ODVODENIE?

Spomenutý výklad NIE je odvodením. Doteraz *neexistuje* žiadne odvodenie fundamentálnych zákonov kvantovej mechaniky. Žiadne takéto odvodenie nemožno dozaista urobiť v rámci klasickej fyziky!

Vyzerá to tak, že nie je možné žiadne fundamentálne odvodenie. Napriek tomu, existujú silné dôvody pre správnosť nášho odvodenia. Bolo to dávno, čo Feynman ukázal, že spôsob uvažovania pomocou „stopiek“ vedie striktne k zvyčajnej podobe kvantovej fyziky – vyjadrenej tzv. Schrödingerovou rovnicou. A Schrödingerova rovnica je základom našich predpovedí týkajúcich sa všetkých nerelativistických kvantových štruktúr a experimentov, vrátane chemickej väzby a periodickej tabuľky prvkov.

Všimnite si dve *obmedzenia* používania klasického princípu najmenšieho účinku, ktoré sa javia ako *výhody*, keď sa princíp aplikuje v kvantovej fyzike:

PO PRVÉ, princíp najmenšieho účinku vyžaduje, aby sme fixovali aj v čase aj v priestore dve udalosti „nahodenia“ a „chytania“. Ale toto je výhodou v kvantovej mechanike, kde si potrebujeme vybrať udalosť „emisie“ a tiež čas a miesto, kde sa pokúsime „detekovať“ časticu. Takže princíp najmenšieho účinku obmedzuje popis pohybu práve takým spôsobom, aký potrebujeme v našom kvantovom opise.

PO DRUHÉ, princíp najmenšieho účinku nemožno aplikovať v klasickej fyzike, keď je prítomné trenie. Musíte vedieť definovať potenciálnu energiu, ktorú v prípade, keď trenie celý čas okráda váš letiaci kameň o energiu, nemôžete určiť. Ale v kvantovej mechanike je všetko v poriadku, pretože na atómovej úrovni *niet* žiadneho trenia. Súčet potenciálnej a kinetickej energie sa v nerelativistickej kvantovej fyzike striktne zachováva. Takže ešte raz, princíp najmenšieho účinku ohraničuje našu pozornosť len na tie okolnosti, ktoré potrebujeme pre kvantovomechanický opis.

3. TERMINOLÓGIA

Funkcia $KE - PE$ sa pre časticu s nízkou rýchlosťou nazýva *Lagrangián* (čítaj *lagranžíán*) a označuje sa symbolom L (niekedy písaným L). Takže máme:

$$L = KE - PE \quad (6)$$

a z rovnice (3):

$$f = \frac{KE - PE}{h} = \frac{L}{h} \quad (\text{elektróny a iné častice s hmotnosťou}) \quad (7)$$

Tí, ktorí chcú merať rýchlosť rotácie ω (v radiánoch za sekundu) namiesto f (v otáčkach za sekundu), môžu použiť známy vzťah medzi nimi:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \frac{L}{h} = \frac{L}{h/(2\pi)} = \frac{L}{\hbar} \quad (\text{elektróny, atď.}) \quad (8)$$

Kde $\hbar$, preškrtnutá Planckova konštanta, sa číta „há trans“ a je daná výrazom:

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} \quad (9)$$

Teraz už vieme ako rýchlo sa otáča ručička kvantových stopiek elektrónu.

DODATOK: FORMALIZMUS VEDÚCI K VLNOVEJ FUNKCII

Pokúšame sa vyhýbať formalizmu. Ak vás matematika irituje a frustruje, prejdite na nasledujúci oddiel. Lenže niektorým ľuďom sa páči čisté zhrnutie, ktoré so sebou matematika prináša. A veľkou odmenou im v tomto prípade bude pochopenie kvantovo-mechanickej **vlnovej funkcie**.

Pre získanie výslednej šípky v detektore, Feynman rozvíja systém pravidiel. Pravdepodobnosť, že detektor zachytí časticu je úmerná druhej mocnine dĺžky tejto konečnej šípky. Pravidlá pochádzajúce zo strán 37 a 61 knihy QED môžeme hierarchicky usporiadať:

VEĽKÝ PRINCÍP: Pravdepodobnosť udalosti je úmerná druhej mocnine dĺžky výslednej šípky, ktorú nazývame „kvantová amplitúda“ (Feynman ju nazýva mäťúcim menom „amplitúda pravdepodobnosti“.)

PRAVIDLO PRE ALTERNATÍVNE DRÁHY: Keď môže udalosť nastať viacerými spôsobmi, zobrazte šípku pre každý spôsob, potom ich pospájajte („sčítate“) tak, že zopnete „hlavu“ jednej s „päťou“ ďalšej. Konečná šípka sa potom kreslí od „päty“ prvej ku „hlave“ poslednej šípky. Táto konečná šípka je výslednou šípkou spomínanou vo **VEĽKOM PRINCÍPE**.

PRAVIDLO PRE PO SEBE IDÚCE KROKY NA KAŽDEJ DRÁHE: Keď každý spôsob, ktorým môže udalosť nastať pozostáva zo série po sebe idúcich krokov, tak uvažujeme o každom kroku ako skrátene a pootočení malej šípky. Aby ste našli šípku pre celkovú dráhu, vynásobte skrátene pre všetky kroky na dráhe a sčítajte uhlové zmeny (otáčky) všetkých krokov na dráhe. Šípku pre túto celkovú dráhu pričítame k ostatným od alternatívnych dráh, čím dostaneme výslednú šípku spomínanú vo **VEĽKOM PRINCÍPE**.

Existuje nejaký matematický objekt, ktorý by sa správal týmto spôsobom? Po prvé, tieto objekty sa musia **SČÍTAVAŤ** ako sa sčítavajú šípky. Po druhé **NÁSOBENIE**

takýchto objektov musí spočívať v tom, že nájdeme súčin ich veľkostí a súčet uhlov ich natočenia.

Takýmto matematickým objektom je komplexné číslo, ktoré môže byť vyjadrené v dvoch úplne ekvivalentných tvaroch:

$$Ae^{i\theta} = A \cos \theta + iA \sin \theta \quad (10)$$

Kde $e = 2,71828\dots$ je základ **prirodzených logaritmov** a $i^2 = -1$, kde i je **imaginárna jednotka**. **Komplexné čísla** spájajú reálne a imaginárne čísla.

ODKAZ: *Feynmanove prednášky z fyziky 1*, kapitola 22, predovšetkým 22.5 na stranách 394-399.

Pod sčítaním komplexných čísel rozumieme sčítanie ich reálnych častí a potom osobitné sčítanie ich imaginárnych častí. Toto je ekvivalentné sčítaniu x -ových zložiek a y -ových zložiek, keď chceme získať zložky výslednej šípky. Pre dva komplexné čísla označené indexmi 1 a 2, máme:

$$\begin{aligned} Ae^{i\theta} &\equiv A_1 e^{i\theta_1} + A_2 e^{i\theta_2} \\ &= A_1 \cos \theta_1 + iA_1 \sin \theta_1 + A_2 \cos \theta_2 + iA_2 \sin \theta_2 \\ &= (A_1 \cos \theta_1 + A_2 \cos \theta_2) + i(A_1 \sin \theta_1 + A_2 \sin \theta_2) \end{aligned} \quad (11)$$

Násobenie komplexných čísel je ešte jednoduchšie:

$$Ae^{i\theta} \equiv A_1 e^{i\theta_1} \times A_2 e^{i\theta_2} = (A_1 \times A_2) e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \quad (12)$$

Toto je rovno príklad pravidla o nájdení šípky pre postupnosť krokov na jednej dráhe: **NÁSOBTE** veľkosti šípkok pre každý jednotlivý krok na dráhe a **SČÍTajte** ich uhlové zmeny. Ak A_2 je menšie ako jedna, tak násobenie A_1 a A_2 zodpovedá „skrátaniu“. Sčítanie uhlov zodpovedá „otočeniu“.

Pravdepodobnosť pre konečný výsledok je úmerná druhej mocnine veľkosti (absolútnej hodnoty) výsledného komplexného čísla.

Možno vám už niekto povedal, že kvantovomechanické objekty, také, ako sú napríklad vlnové funkcie, sú komplexné. Prečo je to tak? Použitie komplexných čísel a komplexných funkcií predstavuje iba spôsob, ktorým sa dajú sčítať malé šípky tak, aby sme získali výslednú šípku, *amplitúdu pravdepodobnosti*, druhá mocnina dĺžky ktorej je úmerná pravdepodobnosti. Komplexné čísla sa používajú na popis skrakovania, otáčania a sčítavania tých malých šípkok, ktorá vedú k výslednej šípke a konečnej pravdepodobnosti.

Použitím tohto označenia, môžem opísať pohyb elektrónu pozdĺž alternatívnych dráh. Uhly θ použité v komplexnej notácii sú vyjadrené v radiánoch. Uhlová rýchlosť

ω ručičky kvantových stopiek elektrónu v radiánoch za sekundu je daná spojením dvoch rovníc (6) a (8):

$$\omega = \frac{L}{\hbar} = \frac{KE - PE}{\hbar} \quad (13)$$

Koľko krát sa otočí malá hodinová ručička pozdĺž danej dráhy (nazveme ju dráha k) od počiatočnej udalosti 1 až po konečnú udalosť 2 ? Môžeme to vypočítať , keď začneme s účinkom S pre túto dráhu:

$$S_k = \int_{\text{dráha k}} (KE - PE) dt \quad (14)$$

Pritom sa tu požaduje aby všetky dráhy začínali v tej istej počiatočnej udalosti 1 a končili v tej istej konečnej udalosti 2, tak, aby čas pozdĺž dráhy bol pre všetky alternatívne dráhy rovnaký. To znamená, že kinetická energia je pre rôzne dráhy rôzna a že ani *celková energia pre alternatívne dráhy nie je rovnaká*. (Pre ľubovoľnú vybranú dráhu, nemusí byť celková energia konštantná dokonca ani pozdĺž tejto jednej vybranej dráhy.) Avšak pre masívne častice ukazujú malé šípky od rôznych dráh vo veľmi rozličných smeroch a majú sklon sa vyrušiť. Výnimkou sú len tie, ktoré sú blízko dráhy s minimálnym účinkom, a pre ktoré malé šípky ukazujú približne rovnakým smerom. Pre tieto dráhy sa celková energia zachováva ako sme videli v softvéri ÚČINOK (ACTION).

Príspevok k amplitúde pravdepodobnosti od jednej dráhy je daný výrazom:

$$A_k e^{i\theta_k} = A_k e^{iS_k / \hbar} \quad (15a)$$

Pre tých z nás, ktorí majú problémy zo zrakom, tieto písmena môžu byť asi malé, takže použijeme funkciu $\exp()$, ktorá predstavuje exponenciálnu funkciu so základom e :

$$A_k \exp(S_k / \hbar) \quad (15b)$$

Potom sa amplitúda pravdepodobnosti pre daný výsledok vypočíta zo sumy takýchto príspevkov od všetkých možných dráh (označených indexom k) medzi fixovanou počiatočnou 1 a fixovanou koncovou udalosťou 2:

$$\text{amplitúda pravdepodobnosti (z 1 do 2)} = \sum_{\substack{\text{všetky dráhy k} \\ \text{z udalosti 1}}} A_k e^{iS_k / \hbar} \quad (16a)$$

alebo

$$\text{amplitúda pravdepodobnosti (z 1 do 2)} = \sum_{\substack{\text{všetky dráhy } k \\ \text{z udalosti 1}}} A_k \exp(iS_k / \hbar) \quad (16b)$$

Toto je amplitúda pravdepodobnosti, že elektrón začína z počiatočnej udalosti a prichádza do konečnej udalosti 2 umiestnenej, povedzme v x a t . Túto amplitúdu môžeme volať vlnová funkcia $\psi(x, t)$ pre časticu emitovanú z udalosti 1:

$$\psi(x, t) = \sum_{\substack{\text{všetky dráhy } k \\ \text{z udalosti 1}}} A_k e^{iS_k / \hbar}$$

alebo

$$\psi(x, t) = \sum_{\substack{\text{všetky dráhy } k \\ \text{z udalosti 1}}} A_k \exp(iS_k / \hbar)$$

Toto je význam Feynmanovho výroku v jeho abstrakte článku z roku 1948 v *Reviews of Modern Physics*:¹

„Celkový príspevok od všetkých dráh, ktoré dosiahnu x , t z minulosti je vlnová funkcia“

Odkaz:

¹R.P.Feynman, Space-time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics *Reviews of Modern Physics*, Volume 20, Number 2, April 1948, strany 367-387.

SVETOČIARY KVANTOVEJ ČASTICE

I. HRANICA MEDZI KLASICKOU A KVANTOVOU MECHANIKOU

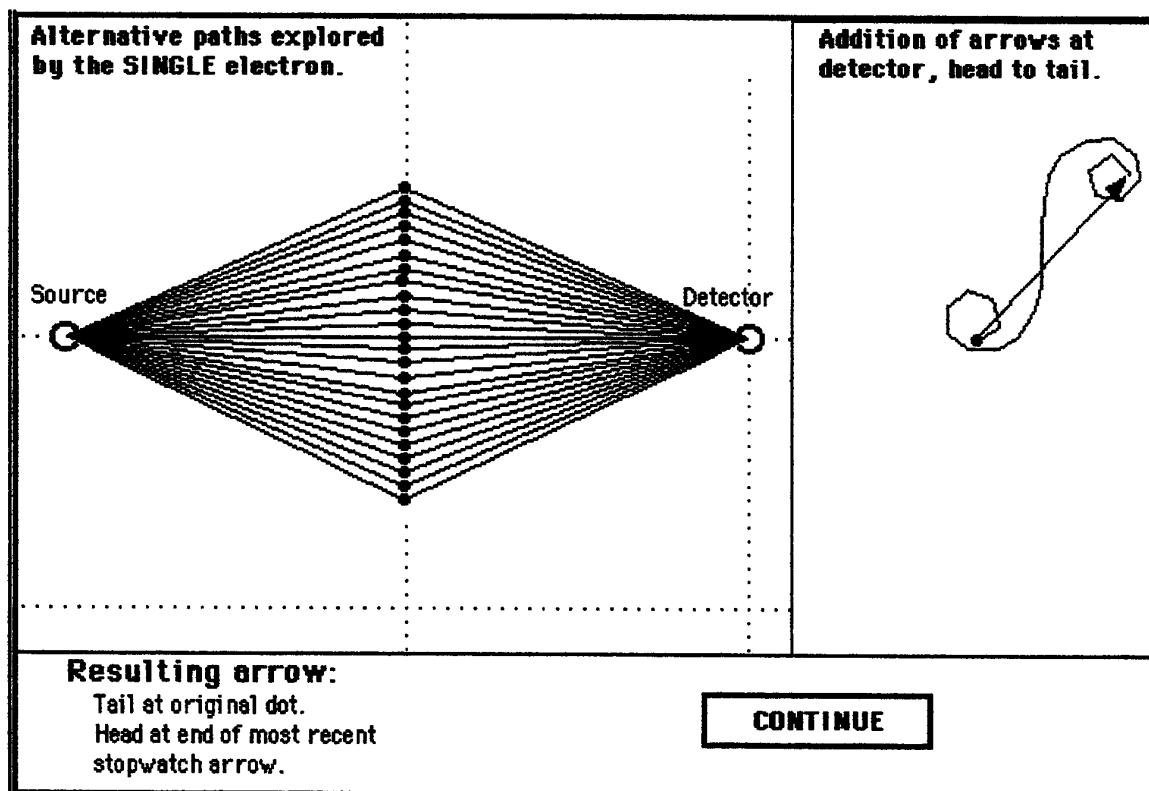
Prvá časť nasledujúcich cvičení skúma KVANTOVÝ pohyb VOĽNEJ častice, častice, ktorá sa pohybuje v neprítomnosti potenciálu. Tieto cvičenia predovšetkým skúmajú hranicu medzi klasickou a kvantovou mechanikou. Kedy ste DONÚTENÍ použiť kvantovú mechaniku? Myslíme tým, za akých okolností budú vaše odpovede NESPRÁVNE, ak nepoužijete namiesto klasickej mechaniky kvantovú mechaniku? Na preskúmanie hranice medzi kvantovou a klasickou mechanikou, využijeme svetočiary častíc rôznej hmotnosti.

Na danom malom úseku svetočiary (pre danú rýchlosť v častice), je rýchlosť rotácie ručičky kvantových stopiek voľnej častice väčšia, ak má častica väčšiu hmotnosť m a menšia, ak m je menšia, podľa vzorca:

$$f = \frac{KE}{h} = \frac{mv^2}{2h} \text{ otočení za sekundu} \quad (1)$$

Elektrón má najmenšiu hmotnosť m zo všetkých známych stabilných častíc. Preto budú mať kvantové stopky elektrónu pozdĺž hocijakého úseku svetočiary najmenšiu rotačnú rýchlosť – a pozdĺž celej svetočiary im bude prislúchať najmenší celkový počet otáčok. Častici s hmotnosťou 10krát väčšou ako má elektrón bude prislúchať medzi udalosťami pozdĺž tej istej svetočiary desať krát väčší počet otáčok jej kvantových stopiek. (EXISTUJE častica desaťkrát ťažšia častica než elektrón? Bud'te ticho, vy!)

Obrázok 1 pripomína program JEDNA ČASTICA (ONE PARTICLE) v prípade elektrónu. Zobrazuje výslednú šípku, pre množinu dráh medzi emitorm a detektorom. Sčítanie malých ručičiek kvantových stopiek pre všetky alternatívne dráhy, spôsobom hlava k päte, zobrazené na obrázku vpravo, dáva krivku v tvare písmena S, nazývanú Cornuova špirála. Možno vidieť, že malé ručičky stopiek, zodpovedajúce dráham ležiacim blízko priamej dráhy, všetky ukazujú približne tým istým smerom a vytvárajú tak hlavný príspevok k výslednej šípke.

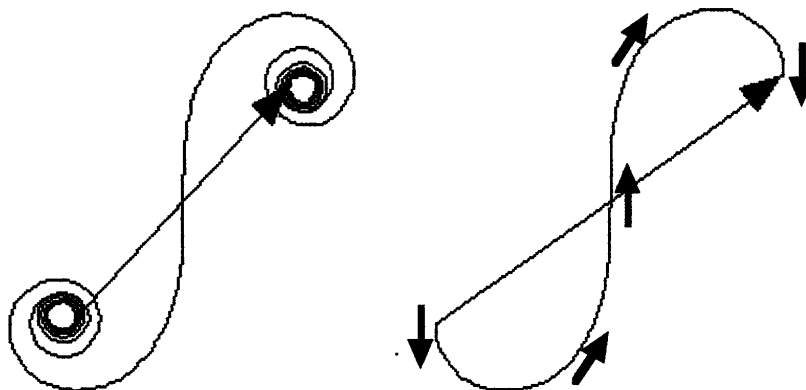


Obrázok 1: Na občerstvenie pamäti: Takto vyzerá obrazovka v programe OneParticle v prípade voľby ELEKTRÓN. Keď zložíme ručičky všetkých stopiek – päta k hlave – zodpovedajúce všetkým dráham na obrázku, dostaneme Cornuovu špirálu (pravé okno). Šípky, ktoré zodpovedajú priamejším dráham, smerujú všetky viac-menej v tom istom smere a preto tvoria hlavný príspevok k výslednej šípke v detektore.

Obrázok 2 porovnáva výslednú šípku zodpovedajúcu (takmer) úplnej Cornuovej špirále s výslednou šípkou v prípade, keď sú zahrnuté len tie dráhy, ktorých kvantové stopky ukazujú o polovicu otáčky viac alebo menej ako ručička kvantových stopiek priamej dráhy. (Zopakujte si predchádzajúci oddiel „Kvantové stopky pre voľný elektrón“, najmä obrázok 2 a otázky, ktoré po ňom nasledujú). Na obrázku 1 (nad) a 2 (pod) ukazuje v detektore ručička kvantových stopiek priamej dráhy zhodou okolností zvislo nahor. Tento smer má stredná časť Cornuovej špirály. Je znázornená „vzorkovacou šípkou“ v pravej časti obrázka 2. Naproti tomu, ručičky kvantových stopiek krajných koncov krivky S ukazujú opačne ako je tento smer, pol otáčky navyše k smeru ručičky stopiek strednej časti. Dlhá výsledná šípka v pravej časti obrázka má však stále približne rovnakú dĺžku a smer ako výsledná šípka v ľavej časti obrázka, ktorá zahŕňa príspevky z oveľa širšieho rozsahu dráh.

V súhrne, zostáva pravdou, že KAŽDÁ dráha od zdroja po detektor prispieva k výslednej šípke v detektore malou ručičkou stopiek ROVNAKEJ DĹŽKY. Existuje

však istá malá množina dráh, ktorých ručičky stopiek ležia vo viac menej rovnom smere. Túto malú množinu dráh môžeme použiť na to, aby sme získali „dost



dobrý“ odhad výslednej šípky.

II. PROGRAM ÚČINOK (ACTION) PRE MIKROSVET

Program ÚČINOK (ACTION) v menu PÔVODNÉ NASTAVENIE (DEFAULT) obsahuje PÔVODNÉ MIKRO NASTAVENIE (MICRO DEFAULT), so zámerom pomôcť vám preskúmať vplyv rôznych hmotností na správanie voľnej častice. Môžete pomocou neho ukázať že častica s malou hmotnosťou vyžaduje na popis svojho pohybu kvantovo mechanickú teóriu súčtu cez všetky dráhy, zatiaľ, čo v klasickej mechanike opisuje pohyb ťažšej častice „dostatočne presne“ jedna dráha.

Obrázok 2: Skladanie ručičiek stopiek pochádzajúcich od alternatívnych dráh, s ktorým sme sa stretli na obrázku 1. Výslednú šípku zodpovedajúcu (skoro) úplnej Cornuovej špirále (vľavo) aproximuje (vpravo) šípka zložená len z príspevkov od tých svetočiar, ktorým prislúchajúci počet otáčok sa od toho, ktorý prislúcha priamej svetočiare, líši o jednu polotáčku, alebo o menej. Malé čierne šípky znázorňujú smery šípok, ktoré prislúchajú rôznym dráham a vytvárajú Cornuovu špirálu.

V PÔVODNOM MIKRO NASTAVENÍ (MICRO DEFAULT) je časová os vždy zvislá. Je to profesionálna dohoda. Naučte sa, ako vybrať niekoľko možných svetočiar medzi udalosťou emisie a udalosťou detekcie. Všimnite si, že v tomto priestoročasovom diagrame môžete prostredné body-udalosti ťahať tam a späť vodorovne.

III. EFEKTÍVNY ZVÄZOK SVETOČIAR V NULOVOM POTENCIÁLI

Použitím programu ÚČINOK (ACTION) vykonajte nasledujúcu procedúru.

KROK 1. VOĽBY V MENU

V menu PÔVODNÉ NASTAVENIE (DEFAULTS) vyberte PÔVODNÉ MIKRO NASTAVENIE (MICRO DEFAULTS)

V menu MREŽKA (GRID) vyberte MREŽKA Z ČIAR (LINE GRID).

V menu KRAJNÉ BODY (ENDPOINTS) vyberte KONCE OPROTI (OPOSSITE ENDS).

Na spodku obrazovky by mali byť slová:

„hmotnosť častice = 10 m (elektrónu), potenciál = NULOVÝ POTENCIÁL“
(Particle mass = 10 m (electron), Potential = ZERO POTENTIAL)

Ak sú iné, použite menu, aby ste ich nastavili.

KROK 2. VYTVORTE SVETOČIARY

Vytvorte (v akomkoľvek poradí) dve ďalšie alternatívne dráhy medzi udalosťou emisie a udalosťou detekcie, čím budete mať dokopy 3 dráhy.

POZNÁMKA 1: Ak nevidíte tlačidlo ĎALŠIA SVETOČIARA (NXT WRDLN) alebo PRIDAŤ SVETOČIARU (ADD WRDLN), tak kliknite na tlačidlo ZMENA NA „PRIDAŤ BODY“ (CHANGE TO „ADD DOTS“).

POZNÁMKA 2: Pozrite si, ako príklady takýchto troch svetočiar obrázky 3 a 4 v reprinte „Teaching Feynman’s sum-over-path quantum theory“ na konci tejto cvičebnice.

KROK 2A. JEDNA svetočiara – tá priama, sa vytvorí vždy a nemá žiadne prostredné body – udalosti. V nulovom potenciáli je to svetočiara s minimálnym účinkom.

POZNÁMKA: Druhá a tretia svetočiara NIE SÚ svetočiary s minimálnym účinkom.

KROK 2B. DRUHÁ svetočiara má jediný prostredný udalosť NAPRAVO od stredu prvej svetočiar. Táto prostredná udalosť je na vodorovnej priamke, ktorá je zľava označená číslom 0,5, čo predstavuje $0,5 \times 10^{-7}$ sekundy (pozri popis hore nad zvislou osou).

KROK 2C. TRETIA svetočiara má jedinú prostrednú udalosť NALAVO od stredu prvej svetočiar, na tej istej vodorovnej priamke ako stredná udalosť druhej svetočiar.

KROK 3. Teraz sa pozrite na pravú časť obrazovky, ktorá zobrazuje celkový počet otáčok pozdĺž každej z týchto troch svetočiar. Pohybujte sa tam a späť medzi týmito tromi svetočiar. (Aby ste mohli zmeniť svetočiary, budete možno musieť stlačiť tlačidlo ZMENA NA „POHYBLIVÉ BODY“ (CHANGE TO „MOVE DOTS“).) Vodorovne posúvajte stredné body oboch vonkajších svetočiar (DRUHEJ a TRETEJ), pokým nebudú po oboch stranách priamej svetočiar a pokým kvantové stopky každej z nich nebudú ukazovať o POLOVICU OTÁČKY VIAC než je počet otáčok priamej svetočiar. Zbytočne sa netrápte s *presným* nastavením dodatočnej pol obrátky. (PREČO pol obrátky navyše? Pripomente si výklad v oddieli I hore.) PRÍKLAD: Ak je počet obrátok pozdĺž priamej svetočiar 11,4, vaším cieľom je nájsť po jej oboch stranách nájsť svetočiary, ktoré majú o 0,5 otáčky viac, konkrétne 11,9 otáčok.

Svetočiary, ktoré ste nakreslili, približne ohraničujú zväzok svetočiar, ktoré tvoria najväčší príspevok k výslednej šípke v detektore.

KROK 4. Prečítajte a zapíšte približne súradnice x (mierka je na spodku pozdĺž vodorovnej osi) prostredných bodov druhej a tretej svetočiary, ktoré spĺňajú spomínané kritérium. POZNÁMKA: Je dôležité, aby ste SPRÁVNE ZAPÍSALI JEDNOTKY – pozri popis vodorovnej mierky.

KROK 5. Teraz zopakujte procedúru z krokov 1 až 4 pre časticu s hmotnosťou $100\,m$ (elektrónu), a nakoniec pre časticu s hmotnosťou m (elektrónu).

POZNÁMKA 1: Po stlačení tlačidla NOVÝ PRÍPAD (NEW CASE), Vyberte rôzne hmotnosti z menu HMOTNOSŤ (MASS).

POZNÁMKA 2: Pri najmenšej hodnote hmotnosti môžu vzniknúť problémy pri odčítavaní.

O1. Predložte úhladnú a jasnú tabuľku svojich výsledkov, ktorá zobrazuje hmotnosť každej častice a polohu (so správnymi jednotkami) prostredných bodov tretej a druhej svetočiary, nájdenú počas kroku 3.

O2. Zhrňte v STRUČNEJ správe svoje závery o prechode medzi kvantovým a klasickým správaním voľnej častice (častice pohybujúcej sa v oblasti bez potenciálu).

IV. ČASTICE RÔZNEJ HMOTNOSTI VO VÄZBOVOM POTENCIÁLI

V tomto oddieli preskúmame „šírenie“ svetočiar minimálneho účinku pri väzbovom potenciáli – potenciáli, ktorý „drží“ nabitú časticu blízko centra elektrickej príťažlivosti. „Zabehne“ častica nízkej hmotnosti ďalej alebo bližšie než častica väčšej hmotnosti?

B1. VOĽBY V MENU

V menu PÔVODNÉ NASTAVENIE (DEFAULTS) vyberte MIKRO PÔVODNÉ NASTAVENIE (MICRO DEFAULTS)

V menu POTENCIÁL (POTENTIAL) vyberte položku EXPONENCIÁLNA JAMA (EXPONENTIAL WELL).

V menu MRIEŽKA (GRID) vyberte MRIEŽKA Z ČIAR (LINE GRID).

V menu KRAJNÉ BODY (ENDPOINTS) vyberte POLOHY V STREDE (CENTER POSITIONS).

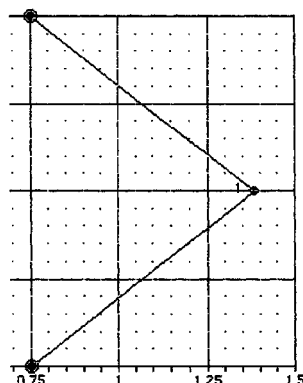
B2. Kliknite niekde bokom a vytvorte jeden stredný bod, ako je to na obrázku 3.

B3. Z menu POČET BODOV (#DOTS), vyberte NIEKOĽKO (SOME DOTS).

B4. Kliknite na tlačidlo ZMENA NA „POHYBLIVÉ BODY“ (CHANGE TO „MOVE DOTS“).

B5. Z menu POĽOVAČKA NA MINIMUM (HUNTING MINIMUM) vyberte VODOROVNÁ POĽOVAČKA (HUNT HORIZONTAL).

B6. Program nechajte bežať dovtedy, pokým sa už body viacej nepohybujú. Kliknite KONIEC POĽOVAČKY (STOP HUNT).



Obrázok 3: Umiestnenie stredného bodu na pravej strane, v strede zhora nadol.

B7. Zapište počet otáčok a maximálnu hodnotu x svetočiary, ktorá sa v oblúku vychýľuje na stranu. Len vás pekne prosím, dbajte na SPRÁVNE JEDNOTKY – pozrite popis vodorovnej mierky.

B8. Stlačte NOVÝ PRÍPAD a z menu HMOTNOSŤ (MASS) vyberte $m = m$ (elektrónu).

B9. Teraz zopakujte kroky B2 až B7. Zistíte, že krivka pri vydúvaní nabúra na hranicu okna na pravej strane.

B10. Stlačte tlačidlo NOVÝ PRÍPAD (NEW CASE) a použite menu SÚRADNICE COORDINATES) na nastavenie $x_{\max} = 1,5 \times 10^{-4}$ metra. V tomto cvičení nemeňte časovú mierku, ktorej maximálna hodnota je $t_{\max} = 10^{-7}$ sekundy.

B11. Znova zopakujte kroky B2 až B7 a zapište počet otáčok.

B12. Zopakujte všetko pre každú hmotnosť danú v menu HMOTNOSŤ (MASS), pričom si v menu SÚRADNICE (COORDINATES) prispôbte $x_{\max}$ podľa potreby.

O4. Urobte úhladnú tabuľku, ktorá zobrazuje (a) hmotnosť častice ktorú skúmame, (b) počet otáčok svetočiary s minimálnym počtom otáčok a (c) maximálnu súradnicu x , ktorú dosiahne doprava vydatá svetočiara (so správnymi jednotkami).

O5. Stáva sa šírka priestoru, ktorým prechádza viazaná častica pri pohybe po dráhe minimálneho účinku, pri NÁRASTE hmotnosti častice, ŠIRŠIA alebo UŽŠIA?

V. ZÁVEREČNÉ ZHRNUTIE ALEBO O ČOM TO VŠETKO JE

ZHRNUTIE ODDIELU III: EFEKTÍVNY ZVÄZOK SVETOČIAR V NULOVOM POTENCIÁLI

V oddieli III ste študovali rozmazávanie kvantových dráh okolo dráhy s minimálnym počtom otáčok v neprítomnosti potenciálu. Sú VŠETKY tieto kvantové dráhy rovnocenné? Áno. Sú si všetci Američania rovní? Áno (ideálne), prinajmenšom z

právneho hľadiska. Avšak spoločenský kritik, by povedal, že niektorí Američania nepracujú v prospech presadzovania spoločenských dober tak, ako aby mohli. To preto, lebo IM CHÝBA SPRÁVNY SMER. Nie všetci ťahajú tým istým smerom. Podobne, kvantová mechanika je dokonalou demokraciou. Každá jednotlivá kvantová dráha prispieva malou šípkou rovnakej dĺžky. Ale nie všetky kvantové dráhy prispievajú k výslednej šípke v detektore významne. Prečo nie? Pretože IM CHÝBA SPRÁVNY SMER. To znamená, že ich malé šípky ukazujú hocikade, len nie v rovnakom smere, akým je ten pre dráhu s minimálnym počtom otáčok. V okolí svetočiary s minimálnym počtom otáčok (a IBA v okolí tejto svetočiary) sa nachádza „zväzok“ svetočiar, ktorých drobné šípky sa líšia v smere od smeru šípky pre minimálny počet otáčok najviac o polovicu otáčky. Oni sú „hnacie sily“ a „lámači ľadov“, VÝZNAMNÍ prispievatelia pri konštrukcii výslednej šípky v detektore.

Pre väčšiu a väčšiu hmotnosť, sa tento zväzok významných svetočiar stáva užším a užším. V limite veľkej hmotnosti to VYZERÁ tak, že zostáva iba JEDNA svetočiara. Toto charakterizuje klasický popis – jedna svetočiara s minimálnym počtom otáčok (S/h) alebo s minimálnym účinkom S . Prestala baseballová loptička skúmať všetky dráhy? Rozhodne NIE! Úplný rozbor pohybu baseballovej loptičky hodenej v Chicagu zahŕňa svetočiary, ktoré dosiahnu lapačku chytača cez Hong Kong. Lenže „Hongkonské svetočiary“ k výslednej šípke pre chytačovu lapačku veľmi neprispievajú. Prečo? Pretože neležia blízko svetočiary minimálneho účinku, takže ich šípky ukazujú vo viacerých rušiach sa smeroch. No malé šípky od svetočiar VEĽMI blízky k trajektórii minimálneho účinku, vedúcej do chytačovej lapačky, SA SČÍTAVAJÚ. Alebo že by svetočiara minimálneho účinku viedla do baseballovej palice? Prásk! Home run!¹ Vidíte teraz aj vy baseball v novom svetle?

ZHRNUTIE ODDIELU IV: ČASTICE RÔZNEJ HMOTNOSTI VO VÄZBOVOM POTENCIÁLI

V oddieli IV je výklad podobný. Častica sa pohybuje v potenciáli, ktorý nezávisí od hmotnosti častice. Prečo by vôbec mala častica stráviť nejaký čas mimo stredu, ak nastanú aj emisia aj detekcia v strede? Pretože potenciál je tým väčší, čím je častica od stredu ďalej. Pri potulkách ďalej od stredu strávi častica čas v oblastiach vyššieho potenciálu, takže MÍNUS PE bude znižovať hodnotu účinku. Takéto správanie vyplýva z princípu najmenšieho účinku.

Avšak čím väčšia je hmotnosť častice, tým viac zvyšuje jej kinetická energia $KE = 1/2 mv^2$ hodnotu účinku pozdĺž svetočiary. (Spomeňte si na to, že účinok S predstavuje časový súčet, t.j. integrál $KE - PE$ cez čas.) V prípade hmotnejšej častice sa účinok zníži viac vtedy, keď častica pôjde zo zdroja do detektora po pri-

¹ Baseball sa hrá na ihrisku, v ktorom je vyznačený štvorec - tzv. diamond. Cieľom jedného z tímov je dosiahnuť tzv. home run - obehnutie všetkých štyroch základní (vrcholov štvorca) odpaľovačom (samozrejme za určitých podmienok), za čo obdrží tím určitý počet bodov.

mejšej dráhe (s malou priemernou kinetickou energiou). Čím väčšia je hmotnosť, tým je pre časticu menej výhodné potulovať sa ďaleko od priamej dráhy, kde by bola v oblastiach vyššieho potenciálu (takže MÍNUS PE by znižovalo účinok). Preto dráhy minimálneho účinku hmotnejších častíc vo väzbovom potenciáli "nezbiehajú" tak ďaleko ako dráhy menej hmotných častíc. Pre danú hmotnosť častice a daný priebeh väzbového potenciálu možno odhadnúť alebo namodelovať kam až zabehnú tieto dráhy minimálneho účinku. Získame z toho odhad veľkosti atómu? Verím, že by sme ho získali. Lenže atóm je popísaný kvantovou mechanikou, v ktorej elektrón skúma VŠETKY svetočiary medzi emisiou a detekciou. Predtým než sa vrátíme ku kvantovému prípadu, pozrieme sa na zvláštny klasický prípad, v ktorom existuje viac než jedna klasická dráha medzi počiatočnou a konečnou udalosťou.

VLNOVÁ FUNKCIA

1. ÚVOD

Teraz sa pomocou kvantovomechanickej teórie súčtu cez všetky dráhy zoznámime s hlavným aktérom tradičnej kvantovej mechaniky: **vlnovou funkciou** elektrónu.

Čo je to vlnová funkcia? Až doposiaľ sme uvažovali o jednom detektore, ktorý môže CVAKNÚŤ (alebo nemusí), čím signalizuje detekciu elektrónu v danom čase. Náš výpočet výslednej šípky pre udalosť detekcie nám pomáha určiť pravdepodobnosť detekcie elektrónu v danom mieste a čase.

Ale prečo sa uspokojovať s jedným detektorom a jednou udalosťou detekcie? Prečo sa pozeráť len na jeden malý kúsok priestoru—jeden detektor—keď môžeme zdvihnúť zrak a vidieť celé okolie? Prečo nemať detektory všade a nepýtať sa aká je pravdepodobnosť detekcie elektrónu HOCIKDE V PRIESTORE V DANOM ČASE?

Žiadny problém! Musíme len pre tento čas (ale pre rôzne polohy) prepočítať výslednú šípku v každom z detektorov, ktoré sú roztrúsené po celom priestore. Rôzne dráhy do rôznych polôh znamenajú rôzne výsledné šípky. Výsledkom je celý súbor výsledných šípok, z ktorých každá, keď umocníme jej dĺžku na druhú, nám hovorí o pomernej pravdepodobnosti nájdenia elektrónu v detektore pre tento čas.

Vlnová funkciu v danom čase t tvorí celý súbor výsledných kvantových šípok roztrúsených v tomto čase po celom priestore.

Kde JE častica v čase t ? To nikto nevie! Ešte nebola detekovaná. Lenže vlnová funkcia nám hovorí, kde hľadať: Pomerná pravdepodobnosť nájdenia častice v ľubovoľnom mieste v čase t je úmerná druhej mocnine dĺžky výslednej šípky v danom mieste.

2. PRIESTOROVÉ OKNO

(Nasledujúci výklad je TROCHA komplikovaný. Buďte vytrvalí a nevzdávajte sa—je dôležitý!)

Kde naša častica štartuje? Doposiaľ sme predpokladali, že častica je emitovaná v konkrétnom čase z jedného zdroja umiestneného v istom bode. (Jedinou výnimkou bol fotón z koherentného zdroja, ktorý mal v každom čase istú amplitúdu pravdepodobnosti toho, že bude emitovaný—obrázok 68, strana 104 QED.) Teraz sa pokúsime našu predstavu počiatočných podmienok zovšeobecniť. Uvažujte o nasledujúcej postupnosti udalostí:

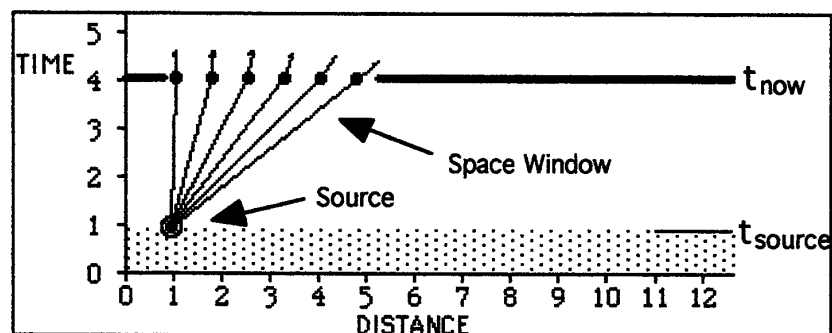
KROK 1. Elektrón je emitovaný zo zdroja v skoršom čase t_{zdroj} .

KROK 2. V terajšom okamihu t_{teraz} použijeme na hľadanie elektrónu jasné svetlo. Budeme hľadať všade OKREM určitej vybranej oblasti priestoru. Túto vybranú oblasť priestoru kde v čase t_{teraz} NEHLADÁME elektrón, nazveme **priestorové okno**.

KROK 3. Ak detekujeme elektrón v jednom z miest, kde v čase t_{teraz} POZERÁME, tak experiment prerušíme a začneme znova krokom 1. AK elektrón NENÁJDEME, usúdime, že jeho dráhy prechádzajú cez priestorové okno. Potom pokračujeme v tomto myšlienkovom experimente krokom 4.

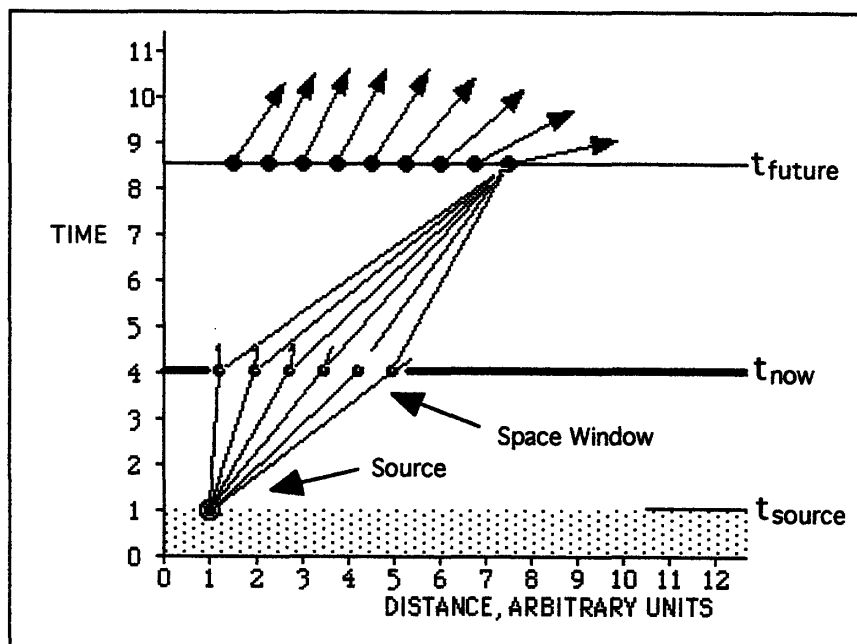
V kroku 3 sme odhalili rozsah miest, kde musí elektrón byť, jednoducho tým, že sme ho tam NEHLADALI. Bláznivý svet, však?

Situáciu sumarizuje obrázok 1, zatiaľ v jednom rozmere.



Obrázok 1: Priestorové okno v jednom priestorovom rozmere. Priestorové okno je „otvor“ v hrubej čiernej vodorovnej čiare, ktorá prechádza časom t_{teraz} . Hrubá čierna čiara poukazuje na fakt, že pri tom, ako sme pomocou veľmi jasného svetla prehľadávali priamku všade, OKREM polôh, ktoré predstavujú priestorové okno, sme nenašli elektrón. Svetočiarly spájajú zdroj s bodmi priestorového okna. Malé šípky na bodkách v priestorovom okne predstavujú ručičky kvantových stopiek v týchto bodoch priestoročasu.

KROK 4. Chceme určiť možné umiestnenia elektrónu v konkrétnom čase $t_{\text{budúcnosť}}$ v budúcnosti. Aby sme to mohli urobiť, skonštruujeme všetky možné svetočiarly z počiatočnej udalosti emisie do každého bodu v priestore, v čase $t_{\text{budúcnosť}}$. Pomocou nášho jasného svetla sme vylúčili všetky dráhy, ktoré neprechádzajú cez priestorové okno. Takže usudzujeme, že všetky možné svetočiarly medzi t_{zdroj} a $t_{\text{budúcnosť}}$ prechádzajú cez priestorové okno (oblasť priestoru v čase t_{teraz} , ktorú sme neprezreli). Pozri obrázok 2.

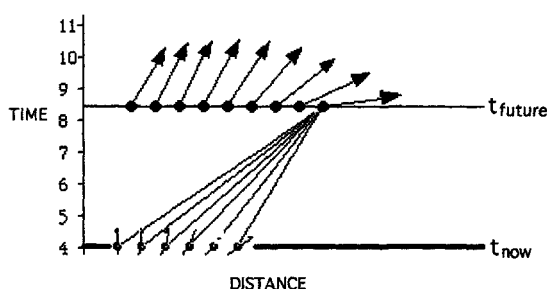


Obrázok 2: Elektrón sa do budúcnosti dostáva tak, že skúma iba tie svetočiary, ktoré prechádzajú priestorovým oknom.

3. ZAČÍNAME PREDPOVEDAŤ BUDÚCNOSŤ

Pokračujme v myšlienkovom experimente opísanom v predchádzajúcom oddieli. V priestorovom okne, skonštruujte v čase t_{teraz} vlnovú funkciu. Každý bod priestorového okna obsahuje malú šípku ukazujúcu v nejakom smere, ktorá je výsledkom spojenia medzi touto udalosťou a počiatočnou emisnou udalosťou v skoršom čase t_{zdroj} .

Naša konečná vlnová funkcia v neskoršom čase $t_{\text{budúcnosť}}$ bola CELÁ zostrojená použitím IBA tých svetočiar, ktoré prechádzali cez priestorové okno. Nikto nám nemôže zabrániť v tom, aby sme sústredili svoju pozornosť len na druhú polovicu tohto myšlienkového experimentu. Pozrime sa teda len na svetočiary idúce z udalostí v priestorovom okne v čase t_{teraz} do koncového bodu detekcie v čase $t_{\text{budúcnosť}}$. Na druhú polovicu experimentu sa potom možno pozeráť ako na vývoj vlnovej funkcie, ktorý začína v priestorovom okne v čase t_{teraz} . Od tohoto okamihu sa vlnová funkcia vyvíja dovedy, až kým nepopíše šípky všade v priestore v neskoršom čase $t_{\text{budúcnosť}}$. Pozri obrázok 3.

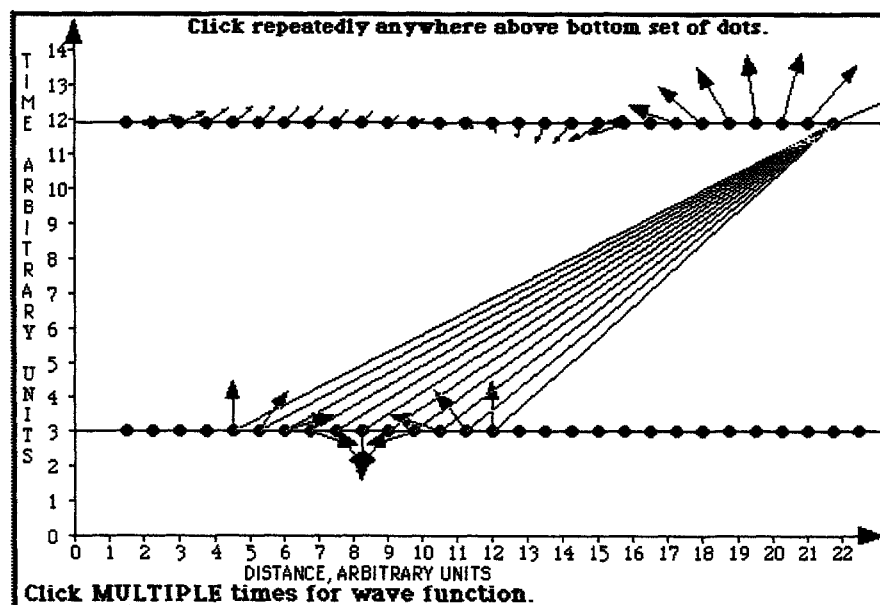


Obrázok 3: Budúcu vlnovú funkciu môžeme zostrojiť pomocou vlnovej funkcie v priestorovom okne. Svetočiary vychádzajúce zo zdroja už nepotrebujeme.

PRIPOMIENKA: Všetky vlnové funkcie v rôznych časových okamihoch reprezentujú len JEDEN elektrón.

4. ĽUBOVOL'NÁ POČIATOČNÁ FUNKCIA

Vlnová funkcia v čase t_{teraz} , ktorá bola opísaná v predchádzajúcom oddieli, ešte stále reprezentuje špeciálnu situáciu: elektrón, ktorý bol emitovaný z bodového zdroja v skoršom čase t_{zdroj} . Ibaže táto skoršia emisia elektrónu z bodu nemusí byť pre nás dostupná. Elektrón, vo vnútri vodíkového atómu v medzigalaktickom priestore, je v tomto atóme možno stáročia. Takže ak chceme opísať prírodu, potrebujeme byť schopní začať s počiatkovej vlnovej funkcie, ktorá reprezentuje situáciu TERAZ (t_{teraz}), a na základe nej potom predpovedať situáciu v BUDÚCNOSTI ($t_{\text{budúcnosť}}$). A náš myšlienkový experiment nám ukazuje ako to urobiť. Jednoducho začneme s nejakou vlnovou funkciou (v ktorej sú každému bodu istej oblasti priestoru v čase t_{teraz} priradené počiatkové šípky), tak ako je to zobrazené na obrázku 4. Potom použijeme teóriu súčtu cez všetky dráhy, a pomocou nej spojíme každý z bodov priestoru v čase t_{teraz} s každým bodom v priestore v nejakom budúcom čase $t_{\text{budúcnosť}}$, podobne ako je to zobrazené na obrázku 3 pre náš špeciálny prípad. Výsledné šípky v čase $t_{\text{budúcnosť}}$ predstavujú všetko, čo nám môže kvantová mechanika povedať o pravdepodobnosti nájdenia elektrónu v rôznych polohách v tomto budúcom čase $t_{\text{budúcnosť}}$.



Obrázok 4: Rozšírená ľubovoľná začiatková vlnová funkcia si už vie poradiť sama. To, ako sa má ďalej šíriť ďalej v čase sa dozvie z formulácie kvantovej mechaniky založenej na sumácii cez všetky dráhy. V tomto prípade sa balík šíri doprava.

Skrátka a dobre, teória súčtu cez všetky dráhy nám dovoľuje začať s vlnovou funkciou v čase t_{teraz} (ktorá reprezentuje jeden elektrón v nejakej oblasti priestoru) a

skončiť s predpoveďou vlnovej funkcie v nejakom neskoršom čase $t_{\text{budúcnosť}}$ (ktorý reprezentuje ten istý elektrón v neskoršom čase).

Keď sa rozhodneme hľadať elektrón v tomto budúcom čase, druhá mocnina veľkosti (šípky) vlnovej funkcie v hocijakom bode nám dá pravdepodobnosť nájdenia elektrónu v tomto bode.

Toto je podstata nerelativistickej kvantovej mechaniky.

5. PROGRAM VLNOVÁ FUNKCIA (WAVE FUNCTION)

Domáca úloha využíva program VLNOVÁ FUNKCIA (WAVE FUNCTION). Ponúkame vám zopár úvodných aktivít, aby ste si zvykli na softvér. (Neodovzdávajte nič, čo by malo niečo spoločné s krokmi 0 až 9. Samozrejme, že ich môžete konzultovať so svojimi spolužiakmi.)

KROK 0. Spustíte program VLNOVÁ FUNKCIA (WAVEFUNCTION).

KROK 1. Stlačte tlačidlo ČO BY SME MALI VEDIEŤ (BACKGROUND) a prečítajte si text. Možno budete potrebovať vrátiť sa sem, potom, čo sa pohráte trochu viac s programom.

KROK 2. Kliknite na PRERUŠIŤ (CANCEL), aby ste postúpili k úvodnej obrazovke. Tá zobrazuje priestoročasový diagram so zvislou časovou osou.

KROK 3. Kliknite na tlačidlo POČIATOČNÁ UDALOSŤ (INITIAL EVENT), potom kliknite blízko spodného okraja priestoročasového diagramu, čím vytvoríte počiatočnú emisnú udalosť.

KROK 4. Teraz vytvorte priestorové okno. Ako? Kliknite niekde nad počiatočnú udalosť a naľavo od nej. Potom kliknite napravo. Táto procedúra vytvorí „okno“, vodorovnú bariéru v zvolenom čase, s medzerou alebo oknom cez, ktoré musia prechádzať všetky svetočiary z počiatočnej udalosti do všetkých polôh v neskoršom čase.

KROK 5. Aby ste teraz zobrazili vlnovú funkciu v neskoršom čase, kliknite nad priestorové okno. Táto vlnová funkcia je zobrazená v polohách rovnako od seba vzdialených detektorov. Šípka v každom bode je výslednou šípkou pre dráhy ktoré spájajú počiatočnú udalosť s touto neskoršou udalosťou. Všetky tieto dráhy prechádzajú cez priestorové okno.

KROK 6. Klikajte teraz v rôznych časoch (v rôznych zvislých vzdialenostiach nad priestorovým oknom). Tým budete môcť pozorovať vlnovú funkciu v týchto rôznych časoch.

KROK 7. Kliknite na tlačidlo SPOJITÉ (COUNTINUOUS), aby ste videli pravdepodobnostnú funkciu zodpovedajúcu vlnovej funkcii. Potom kliknite na PLYNÚCI

ČAS (RUN TIME), aby ste videli animáciu, alebo klikajte na KROKOVÁŤ ČAS (STEP TIME), aby ste videli každý záber animácie postupne.

KROK 8. Stlačte tlačidlo NOVÝ PRÍPAD (NEW CASE) a prečítajte si rôzne stručné poznámky v menu POZNÁMKY (NOTES) v hornej časti obrazovky. (Tieto krátke poznámky sú dostupné iba vtedy, keď začínate nový prípad.)

KROK 9. Hrajte sa s krokmi 1 až 8, pre rôzne nastavenia.

7. CVIČENIA S PROGRAMOM VLNOVÁ FUNKCIA (WAVEFUNCTION)

V otázkach O1 až O5 vytvárajte rozličné priestorové okná, každé široké 7 jednotiek – merané pozdĺž vodorovnej osi. (POZNÁMKA: Vo všetkých týchto prípadoch sa stretnete so šípkami a kopcami, ktoré sa budú všelikade rozptyľovať. Keď hovoríme pulz, máme na mysli jeden z primárnych pulzov.) Máte problémy s pojmami? Pozrite si oddiel 8: Dialógy Georgea a Stephanie, nasledujúci po tomto oddieli.

O1. Kliknite na počiatočnú udalosť blízko $x = 0$, $t = 0$ (blízko ľavého dolného rohu priestoročasového diagramu). Ďalším kliknutím v $x = 3$ a $t = 5$ umiestnite ľavý krajný bod priestorového okna. Nasledujúcim kliknutím v $x = 10$, $t = 5$ nastavte pravý krajný bod priestorového okna. Teraz sledujte časový vývoj dvomi metódami: METÓDA A: Kliknite na viacero neskorších časov nad časom 5 v priestoročasovom diagrame. METÓDA B: Začnite nový prípad a nastavte počiatočnú udalosť a priestorové okno ako predtým. Teraz kliknite RAZ práve nad priestorovým oknom, a potom stlačte tlačidlo SPOJITÝ (CONTINUOUS), ďalej tlačidlo PLYNÚCI ČAS (RUN TIME) a sledujte časový vývoj pravdepodobnosti. Opíšte STRUČNE správanie šípek vlnovej funkcie pozorovaných metódami A a B pre toto konkrétne nastavenie. V ktorom smere sa pulz pohybuje?

O2. Čo sa deje s pulzom pravdepodobnosti z otázky O1 pri jeho pohybe? Stáva sa užším, širším, alebo zostáva rovnako široký?

O3. Spustite nový prípad a znovu sa riad'te inštrukciami z otázky O1 (počiatočná udalosť blízko $t = 0$ a priestorové okno v $t = 5$). Tento raz zmeňte vzájomnú vodorovnú polohu počiatočnej udalosti a 7 jednotiek širokého priestorového okna tak, aby sa výsledný pulz pohyboval doprava RÝCHLEJŠIE než ten, ktorý ste skonštruovali v O1. Opíšte STRUČNE, ako ste to urobili.

O4. Pozrite sa na postupnosť šípek v priestorovom okne (širokom sedem jednotiek) v prípade pulzu, ktorý sa pohybuje doprava. Ako sa mení smer jednotlivých šípek v rade, keď sa pohybujete v medzere zľava doprava?

O5. Pokračujme v prípade z otázky O4. Ako sa líšia vzájomné smery medzi šípkami pre pulz, ktorý sa pohybuje rýchlejšie?

Začnite nový prípad a kliknutím na tlačidlo POČIATOČNÁ VLNOVÁ FUNKCIA (INITIAL WFn) na úvodnej obrazovke si nájdite už skonštruované vlnové funkcie. V každom

prípade urobte dopredu PREDPOVEĎ o tom, ako sa bude vyvíjať vlnová funkcia v čase. ODHADUJTE! Až potom skontrolujte svoju predpoveď vyskúšaním v programe. Keď budete hotoví, odpovedzte na nasledujúce otázky o výsledných pravdepodobnostných pulzoch.

O6. Ktorá(é) s počiatočných vlnových funkcií vedie(ú) k jednému pulzu pravdepodobnosti, ktorý sa rozširuje, ale jeho priemerná poloha sa nemení? (Vaša odpoveďou má byť číslo(a) takej vlnovej funkcie. Napríklad, ak vlnové funkcie #1,#2,#3 majú túto vlastnosť a #4 a #5 nemajú, vaša odpoveď nech je 1,2 a 3.)

O7. Zistite číslo(a) počiatočnej(ých) vlnovej(ých) funkcie(i) ktorá(é) vedie(ú) k jednému pulzu, ktorý sa pohybuje jedným smerom?

O8. Zistite číslo(a) počiatočnej(ých) vlnovej(ých) funkcie(i), ktorá(é) vedie(ú) k dvom pulzom pohybujúcich sa v navzájom opačných smeroch?

O9. V čom sa líšia pulzy pravdepodobnosti, ktoré sú výsledkom vlnových funkcií #3 a #4?

V ĎALŠOM sa pokúste konštruovať vlastné vlnové funkcie, použitím tlačidla ZOSTAVIŤ VLASTNÚ VLNOVÚ FUNKCIU (BUILD OWN WF) , ktoré sa objaví v spodnej časti okna, potom čo stlačíte tlačidlo POČIATOČNÁ VLNOVÁ FUNKCIA (INITIAL WFcn). Môžete buď modifikovať každú z daných počiatočných vlnových funkcií alebo stlačte tlačidlo ZOSTAVIŤ WF OD PIKY (BUILD WF FROM SCRATCH). Poznámka: Pri konštrukcii svojej vlastnej vlnovej funkcie, nemusíte mať všetky šípky (dokonca ŽIADNE šípky) orientované zvisle nahor alebo nadol – naťahajte ich pod uhlami, aké len chcete.

O10. Skonstruujte počiatočnú vlnovú funkciu, ktorá vedie k hlavnému pulzu pohybujúcemu sa na obrazovke DOĽAVA. (Návrh: Prejdite si znovu otázku O1, tento raz nájdite pulz, ktorý sa pohybuje doľava a pozrite sa na vzájomné smery šípok v priestorovom okne. Potom začnite znova a skonstruujte svoju vlnovú funkciu.) STRUČNE opíšte svoju vlnovú funkciu.

8. DIALÓGY SO STEPHANIE A GEORGEOM

(trochu upravené, so zmenenými menami študentov)

Stephanie píše:

Mali sme doteraz dosť ťažký týždeň, takže budem stručná. Zatiaľ dosť zápasím s textom a s vypracovaním úloh. Príspevky od iných mi pomohli, lenže nezdá sa mi, že chápem, čo sa deje v softvéri. Čo znamená pohyb pulzu pravdepodobnosti doprava? Vidíte? Som stále na #1! Môžete mi to nejako vysvetliť?

Steph

Stephanie: Trápiš sa so skutočne fundamentálnou otázkou. Až dosiaľ sme mali do činenia s pravdepodobnosťou detekcie v istej špeciálnej oddelenej udalosti detekcie. V experimente bola alebo nebola častica zaregistrovaná. Avšak v danom čase častica NIEKDE byť musí. Preto musí existovať istá pravdepodobnosť zaregistrovať ju aj niekde inde. A o tom hovorí druhá mocnina vlnovej funkcie (presnejšie: druhé mocniny dĺžok malých šípok, z ktorých sa skladá). Keď má pravdepodobnosť tvar zaobleného pulzu, znamená to, že s väčšou pravdepodobnosťou nájdeme časticu blízko centra pulzu než na jeho okrajoch. A pohyb pravdepodobnosti s časom hovorí o tom, že ako plynie čas, zaregistrujeme časticu s väčšou pravdepodobnosťou ďalej pozdĺž smeru pohybu.

Pomohlo to aspoň trochu? Edwin

Áno. Po tom, čo som si to včera pripomenula a premyslela, začala som sa na to tak pozerať. To ma však vedie ešte k ďalšej otázke: Prečo sa pohybuje v čase doprava? Pravdepodobne je to ďalšia fundamentálna otázka.

Aj tak ďakujem za pomoc. Myslím, že sa do toho pomaličkýyyyy dostávam.

Stephanie

Stephanie: Máš pravdu: Je to ďalšia fundamentálna otázka! Slovo „prečo“ je vo vede vždy záludné. Aby som bol konkrétnejší: Je niečo zvláštne na polohe priestorového okna a (v dôsledku toho) na orientáciách malých šípok v priestorovom okne, čo vedie k pulzu, ktorý putuje doprava? Čo to je? Čo podobné by si mala dosiahnuť, aby sa vytvoril pulz putujúci doľava? A ako sa správajú šípky v priestorovom okne v TOMTO prípade?

Vedela by si po tom, čo si rozobrala prípady s priestorovým oknom, ZOSTROJIŤ počiatočnú funkciu, ktorá povedie k pulzu pohybujúcemu sa doľava?

Edwin

George píše:

Čo je to pulz?

Edwin: Je to množina susediacich kvantových šípok v danom čase, ktoré majú v nejakej oblasti priestoru maximum. Druhé mocniny ich veľkostí nám hovoria, že pravdepodobnosť nájdania častice tiež dosahuje v tejto oblasti priestoru maximum. Pulz je to najlepšie, čo môže kvantová mechanika použiť, ak chce popísať pohyb voľnej častice.

George: Čo budeme mať z toho, keď sa budeme zaoberať rýchlosťou pulzu?

Edwin: Zistíme, ako vytvoriť kvantové pulzy, ktoré sa pohybujú rôznymi rýchlosťami a ako rozdiely v počiatočnej vlnovej funkcii (v priestorovom okne) vedú k týmto rozdielnym rýchlostiam.

George: EXISTUJE nejaká súvislosť medzi tvarom počiatočnej vlnovej funkcie a pulzom pravdepodobnosti?

Edwin: Od jedného sa k druhému dostaneme opakovanou aplikáciou teórie súčtu cez všetky dráhy.

9. VÝSKUMNÝ PROJEKT

NAKONIEC, vytvorte svoj vlastný stručný výskumný projekt. Sformulujte otázku, ktorá sa týka vlnových funkcií alebo výsledných pravdepodobností a použite softvér na jej zodpovedanie. Napíšte o svojej otázke a výsledkoch vášho bádania STRUČNÚ správu. Maximálny kredit za tento výskumný projekt je rovnocenný s kreditom piatich bežných otázok.

Možné témy:

TÉMA A: Prevrátenie všetkých šípok. Predpokladajte, že obrátim smer každej šípky v počiatočnej funkcii, pričom dĺžky šípok zachovám. Aký vplyv bude mať táto zmena na výslednú vlnovú funkciu v neskoršom čase? Zmenilo sa niečo? Aký to má vplyv na pravdepodobnostný profil počiatočnej funkcie? Na pravdepodobnostný profil v neskoršom čase? Ako môžem tieto podobnosti a rozdiely vysvetliť?

TÉMA B: Otočenie všetkých šípok. To isté ako v TÉME A, len s tým rozdielom, že vlnovú funkciu zmením tak, že otočím každú šípku o rovnaký uhol, pričom dĺžka šípok ostane nezmenená.

TÉMA C: Nula v strede. Aká musí byť počiatočná vlnová funkcia, aby mala vo všetkých neskorších časoch v strede nulovú hodnotu? Ktoré rôzne typy vlnových funkcií majú túto vlastnosť?

TÉMA D: Rýchlosť rozplývania. Ktorá počiatočná vlnová funkcia dáva pulz pravdepodobnosti, ktorý sa rozplýva pomalšie? Aby sme boli konkrétni: Rozplýva sa počiatočný pulz úzkeho zvonovitého tvaru pomalšie ako počiatočný pulz širokého zvonovitého tvaru? Alebo je to naopak?

PROPAGÁTOR VOĽNEJ ČASTICE

I. SKÚMANIE VŠETKÝCH DRÁH

Teraz už môžeme (konečne!) ukázať ako možno splniť príkaz: „*Preskúmaj VŠETKY svetočiary*“, ktorý elektrónu dáva Feynman (a aj Príroda). Až doteraz sme SKÚMALI LEN VZORKU možných dráh, napríklad tým, že sme ukázali myšou a klikli, čím sme mohli vybrať len niekoľko svetočiar medzi emisiou a detekciou. Ako môžeme sčítať výsledky od VŠETKÝCH dráh, po ktorých sa môže elektrón pohybovať medzi jedným bodom na počiatočnej vlnovej funkcii a druhým bodom na neskoršej vlnovej funkcii? Jedným zo spôsobov ako to urobiť, je vykonať sčítavanie matematicky – a to je riadne komplikovaná záležitosť! Ak chcete vidieť ako si s touto úlohou poradili profesionáli, pozrite sa do prvých dvoch pokročilých textov uvedených v *Odporúčanom čítaní z kvantovej mechaniky*. (Feynman a Hibbs strana 42f a Schulman strana 31f). Jestvuje spôsob, ktorým sa možno vyhnúť sčítavaniu cez všetky dráhy. Stačí ODHADNÚŤ výsledok, vyskúšať ho, a zlepšovať odhad dovtedy, kým nebude fungovať. Práve toto tu budeme robiť: bude to istý druh „spätného konštruovania“, hľadanie spôsobu akým úspešne dosiahnuť predurčený koniec. Výsledky použijeme na popis voľnej častice (pohybujúcej s v oblasti nulového potenciálu) skúmajúcej VŠETKY dráhy medzi „bodom emisie“ na počiatočnej vlnovej funkcii a bodom na neskoršej vlnovej funkcii.

Ako vyzerá náš prvý najlepší odhad toho, ako sa počiatočná vlnová funkcia vyvíja v čase? Nuž, program VLNOVÁ FUNKCIA (WAVEFUNCTION) nebol až taký zlý (obrázok 1 dole). Čo tento program robil? Otáčal každou šípkou počiatočnej vlnovej funkcie pozdĺž priamej svetočiary až k bodu konečnej vlnovej funkcie. Táto rotácia sa vykonávala s frekvenciou $f = KE/h$. Medzi každým počiatočným bodom a každým koncovým bodom, sme uvažovali rotáciu iba pozdĺž JEDNEJ priamej svetočiary, nie sčítavanie výsledkov od všetkých svetočiar. Lenže – hej! – fungovalo to celkom pekne! Takže zostanme pri tom. Náš pôvodný skúšobný proces, používaný v programe VLNOVÁ FUNKCIA (WAVEFUNCTION), by sme mohli zapísať ako slovnú rovnicu. (Čítajte nasledujúcu rovnicu sprava doľava; symbol násobenia znamená „vynásob“ alebo „aplikuj na“.)

$$\left(\begin{array}{c} \text{drobná šípka} \\ \text{v udalosti detekcie} \\ \text{cez} \\ \text{PRIAMU dráhu} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{otáčaj s frekvenciou} \\ f = KE/h \text{ pozdĺž} \\ \text{PRIAMEJ dráhy} \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{c} \text{jedna šípka} \\ \text{v udalosti} \\ \text{emisie} \end{array} \right) \quad (\text{skúšobný tvar}) \quad (1)$$

Ale toto je len náš prvý hrubý odhad. Dá sa očakávať, že keby sme boli úplne presní, t.j. započítali by sme VŠETKY dráhy, nemala by byť konečná drobná šípka len otočená, ale tiež by mala mať inú dĺžku ako počiatočná šípka. Chceli by sme

nahradiť sčítanie výsledkov od VŠETKÝCH dráh jednou procedúrou, resp. jedným násobením. Takýto všeobecnejší prípad by mal mať nasledujúci súhrnný tvar (čítajte sprava doľava):

$$\left(\begin{array}{c} \text{drobná šípka} \\ \text{v udalosti detekcie} \\ \text{cez VŠETKY} \\ \text{dráhy} \end{array} \right) = \left[\left(\begin{array}{c} \text{"vhodný"} \\ \text{súčiniteľ"} \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{c} \text{otáčaj s frekvenciou} \\ f = KE/h \text{ pozdĺž} \\ \text{PRIAMEJ dráhy} \end{array} \right) \right] \times \left(\begin{array}{c} \text{jedna šípka} \\ \text{v udalosti} \\ \text{emisie} \end{array} \right) \quad (2)$$

„Vhodný súčiniteľ“ v rovnici (2) je niečo (zatiaľ ešte neurčené), čo tam vložíme, aby sme získali správny výsledok. Neskôr uvidíme, že tento „vhodný súčiniteľ“ závisí od času medzi udalosťou emisie a udalosťou detekcie. Závisí tiež na hmotnosti častice a na nejakých ďalších veciach. Ukazuje sa, že NEZÁVISÍ na priestorovej vzdialenosti medzi udalosťou emisie a detekcie – túto závislosť má na starosti procedúra v zátvorkách označená: „otáčaj s frekvenciou $f = KE/h$ pozdĺž PRIAMEJ dráhy“.

Hranaté zátvorky na pravej strane rovnice (2) predstavujú „niečo“, čo mení šípku v udalosti emisie na šípku v udalosti detekcie. Rovnicu (2) môžeme zjednodušiť tak, že za výraz v hranatých zátvorkách dosadíme jednoduchšie vyzerajúci výraz:

$$\left(\begin{array}{c} \text{drobná šípka} \\ \text{v udalosti} \\ \text{detekcie D cez} \\ \text{všetky dráhy} \end{array} \right) = K(D,E) \times \left(\begin{array}{c} \text{jedna šípka} \\ \text{v udalosti} \\ \text{emisie E} \end{array} \right) \quad (3)$$

(Slová „drobná šípka v udalosti detekcie“ nám majú pripomínať, že *výsledná* šípka v udalosti detekcie pochádza zo súčtu všetkých „drobných šípok“ od každého bodu pôvodnej vlnovej funkcie.) V rovnici (3) je výraz $K(D,E)$ funkciou, ktorá s počiatočnou šípkou urobí dve veci – tie isté dve veci ktoré by sa s ňou stali, keby sme sčítali výsledky od VŠETKÝCH dráh medzi emisiou E a detekciou D:

1. Otočí počiatočnú šípku do smeru konečnej šípky.
2. Zmení dĺžku počiatočnej šípky na dĺžku malej šípky v detektore.

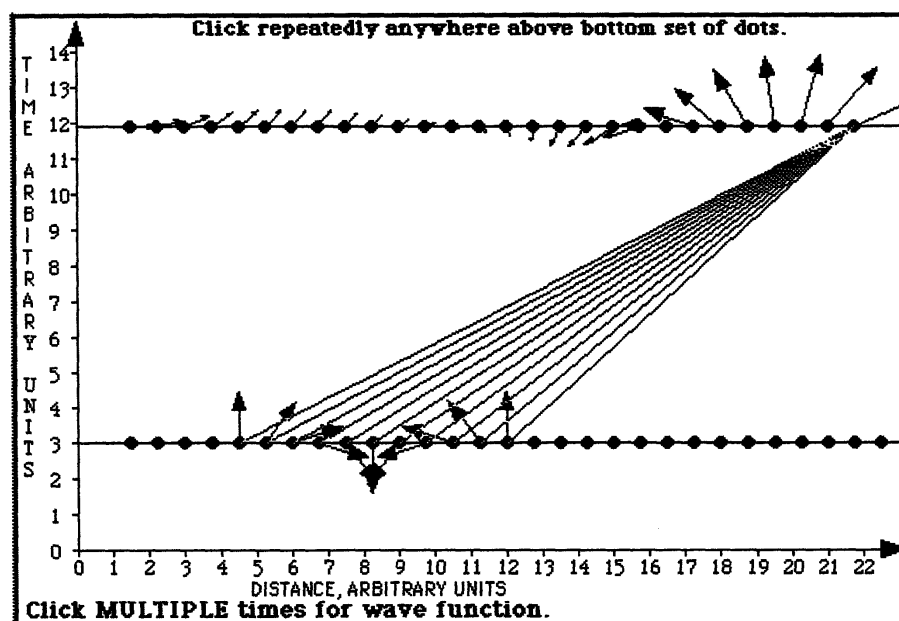
Písmená D a E, ktoré sú súčasťou zápisu funkcie $K(D,E)$, nám majú pripomínať, že $K(D,E)$ závisí od rozdielov polôh a časov medzi udalosťami emisie E a detekcie D. Naším cieľom je nájsť funkciu $K(D,E)$, ktorou budeme môcť v prípade voľnej častice nahradiť skúmanie pozdĺž VŠETKÝCH DRÁH, ktoré je zodpovedné za zmenu počiatočnej šípky na koncovú.

II. PROPAGÁTOR

Funkciu $K(D,E)$ nazývame *propagátor*. (Feynman a Hibbs ju nazývajú *Jadro – Kernel*, čo vysvetľuje prečo má značku K.) Propagátor voľnej častice nám hovorí o tom, akým spôsobom sa zmení drobná šípka v nejakom konkrétnom bode počiatočnej

vlnovej funkcie na drobnú šípku v nejakom konkrétnom bode koncovej vlnovej funkcie, keď častica skúma VŠETKY SVETOČIARY medzi týmito dvomi bodmi.

VÝSLEDNÁ šípka v nejakom koncovom bode (vlnová funkcia v tomto bode) nie je daná iba šípkou získanou od JEDNÉHO bodu počiatočnej vlnovej funkcie. Nie. Je daná súčtom drobných šípok získaných od VŠETKÝCH bodov pôvodnej vlnovej funkcie. Ak chceme získať VÝSLEDNÚ šípku v istom koncovom bode, musíme najprv použiť propagátor pre časový vývoj KAŽDEJ šípky počiatočnej vlnovej funkcie. Tým získame pre tento bod množinu drobných šípok. Potom necháme počítač všetky tieto drobné šípky SČÍTAŤ – ako zvyčajne spôsobom hlava k päte. Tak dostaneme pre tento bod výslednú šípku. Celá procedúra sa potom ďalej opakuje pre každý ďalší bod na koncovej vlnovej funkcii. Program VLNOVÁ FUNKCIA (WAVEFUNCTION) robil tieto veci len zhruba a nepresne, pričom používal len otáčanie pozdĺž jednej svetočiary a nemenil dĺžku počiatočných šípok (obrázok 1). Propagátor, naproti tomu, vykonáva úlohu správne. Dáva nám výsledok skúmania VŠETKÝCH dráh medzi každým počiatočným a každým koncovým bodom v neprítomnosti potenciálu.



Obrázok 1: Program WAVEFUNCTION (z ktorého pochádza tento obrázok) používa skúšobnú verziu propagátora (rovnica 1 hore). Pri výpočte koncovej drobnej šípky v ľubovoľnom bode neskoršej vlnovej funkcie predpokladá, že elektrón skúma z každého bodu spodnej vlnovej funkcie len JEDNU PRIAMU svetočiaru do bodu neskoršej vlnovej funkcie. Potom program sčíta (päta k hlave) v každom bode neskoršej vlnovej funkcie drobné šípky pochádzajúce od všetkých bodov pôvodnej vlnovej funkcie. Tak vznikne v každom bode neskoršej vlnovej funkcie výsledná šípka. Tieto šípky vidíme na tomto obrázku.

ĎALŠIE KROKY: Namiesto toho, aby sme používali iba priamu svetočiaru, nájdeme presný propagátor (v tvare danom rovnicami 2 a 3, hore). Ten nám umožní napodobniť výsledok skúmania VŠETKÝCH dráh medzi každou šípkou na počiatočnej vlnovej funkcii a bodom na koncovej vlnovej funkcii. Koncovú vlnovú funkciu aj naďalej získame tak, že v jej každom bode sčítame (päta k hlave) všetky drobné šípky vypočítané pomocou propagátora, čím získame výslednú šípku v danom bode. A to je správna šípka.

III. HOMOGENNÁ (KONŠTANTNÁ) VLNOVÁ FUNKCIA

Software NÁJDENIE PROPAGÁTORA (FINDPROP) vám umožní skúšať rozličné tvary propagátora voľnej častice dovedy, pokým nenájdete taký, ktorý funguje. ALE – ako budeme vedieť, že funguje správne? Náš pokusný propagátor otestujeme tak, že ho necháme predpovedať časový vývoj vlnovej funkcie, ktorá je pôvodne všade v priestore rovnaká. Takáto homogénna vlnová funkcia pozostáva z reťazca šípok rovnakej dĺžky, pričom všetky ukazujú kolmo nahor (spodný rad šípok na obrázku 2). Homogénnosť je nudná vlastnosť, pretože sa nemení s časom. No a práve pomocou tejto jej vlastnosti náš pokusný propagátor otestujeme. Budeme sa snažiť skonštruovať neskoršiu vlnovú funkciu, ktorá by mala, tak ako predtým, pozostávať z reťazca šípok rovnakej veľkosti a všetky jej šípky by mali ukazovať kolmo nahor.

PREČO by sa počiatočná vlnová funkcia s rovnakými šípkami, ktoré všetky ukazujú smerom hore, mala vyvíjať v čase takým spôsobom, že všetky šípky zostávajú stále tie isté? Z rovnosti druhých mocnín veľkostí týchto šípok vyplýva, že všade pozdĺž osi x bude počiatočné rozdelenie pravdepodobnosti rovnaké. Ak je pravdepodobnosť v priestore všade rovnaká, nemá „kam ísť“ – niet prázdnej oblasti do ktorej by „difundovala“. Kvôli veľmi širokému rozsahu tejto počiatočnej vlnovej funkcie pozdĺž smeru x očakávame, že akýkoľvek možný „pohyb pravdepodobnosti“ ponechá počas dostatočne dlhého času pravdepodobnosť blízko stredu nezmenenú. Predchádzajúce úvahy nám nehovoria nič o tom, že by mali šípky zostávať s časom stále zvislé, lenže my tento výsledok rovnako postulujeme. Program vám umožní aplikovať pokusnú propagátorovú funkciu medzi každým bodom počiatočnej funkcie a každým bodom koncovej vlnovej funkcie a dovoľí vám ju modifikovať dovedy, pokým sa vlnová funkcia nebude meniť.

SKÚSTE SI TO OZREJMEIŤ TOUTO ANALÓGIU: Predpokladajme že, celý vesmír má rovnakú teplotu (ako to možno bude vo vzdialenej budúcnosti!). Potom očakávame, že od tohto okamihu ďalej *zostane* vesmír na tej istej teplote. Toto však s vesmírom vyskúšať nemôžeme, takže to vyskúšame s vaším vykurovaným domom, ktorý je pôvodne celý vykúrený na rovnakú teplotu. V studený bezveterný deň otvoríte na široko predné a zadné dvere. Ako dlho bude trvať, kým zistíte, že sa teplota v strede prvého poschodia zmenila? Odhad : Jednu minútu. Potom sa dá očakávať, že počas prvých desiatich sekúnd zostáva teplota v okolí stredu prvého poschodia rovnaká.

Teplota v tomto príklade je ako pravdepodobnosť v kvantovej mechanike. Chceli by sme začať s vlnovou funkciou, ktorá je na začiatku homogénna v CELOM priestore. Avšak toto urobiť nemôžeme: počítač nemôže robiť výpočty s nekonečným počtom počiatočných šípok! Takže namiesto toho uvažujeme vlnovú funkciu ktorá je na začiatku homogénna v určitej OBLASTI priestoru. „Na začiatku homogénna“ znamená, že všetky šípky majú rovnakú dĺžku a ukazujú v rovnakom smere. Šípky rovnakej dĺžky

znamenajú (ak sa táto dĺžka umocní na druhú) rovnakú pravdepodobnosť nájdenia elektrónu v tejto oblasti priestoru. Ako sa bude meniť táto pravdepodobnosť? Práve tak, ako uniká teplo von cez vaše predné a zadné dvere, bude pravdepodobnosť na koncoch unikať preč. Ale v strede zostane pravdepodobnosť aspoň na chvíľu rovnaká.

Takže očakávame, že DĹŽKA šípok bude v okolí stredu zostávať počas nejakého času rovnaká. Prečo by počas tohoto času mal zaostávať rovnaký aj ich SMER? Ešte stále pracujem na spôsobe ako odpovedať na túto otázku, ale povedzte mi čo si myslíte o nasledujúcom jednoslovnom zdôvodnení: Symetria! Prečo by mali šípky homogénnej počiatočnej vlnovej funkcie, nekonečnej v priestore, ktoré na začiatku všetky ukazujú smerom hore, rotovať radšej v smere chodu hodinových ručičiek než proti smeru chodu hodinových ručičiek? Povieť si: Pretože VŠETKY šípky rotujú v smere chodu hodinových ručičiek – tak sa *správajú* všetky bežné mechanické stopky. Áno, ale to, čo myslíme pod smerom chodu hodinových ručičiek je iba dohoda. Mohli sme rovnako dobre vybrať smer rotácie kvantových stopiek PROTI smeru hodinových ručičiek, a všetko, čo sme robili v kurze by vyzeralo tak isto. Takže záver znie: Niet dôvodu, prečo by šípky v homogénnej počiatočnej funkcii mali rotovať v smere chodu hodinových ručičiek alebo proti smeru chodu hodinových ručičiek. Preto nerotujú vôbec! Presvedčil vás tento argument? Ani mňa nie.

NÁMIETKA: Počkajte chvíľku! Požadujete, aby sa šípky vlnovej funkcie s časom nemenili. Napriek tomu, keď zostrojíte nejakú šípku neskoršej vlnovej funkcie, necháte váš propagátor otáčať šípkami pozdĺž priamych svetočiar z každého bodu na počiatočnej vlnovej funkcii. Potom v každom bode neskoršej vlnovej funkcie sčítavate hlava k päte všetky šípky od počiatočnej vlnovej funkcie. Rozhodnite sa! Rotujú šípky alebo nerotujú?

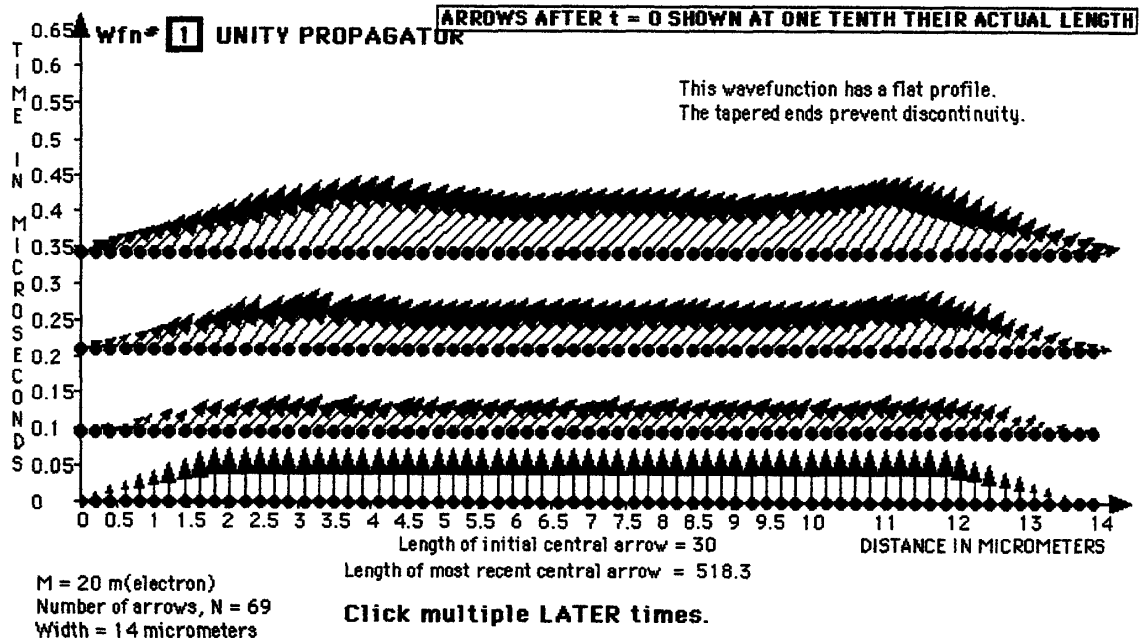
DISKUSIA: Predstavte si váš automobil pohybujúci sa pozdĺž ulice. Navonok sa správa pokojne. Lenže čo sa deje pod kapotou? Obrovskou rýchlosťou tam rotuje kľukový hriadeľ, a každý piest kmitá hore a dole tisícky krát za minútu. Podobne sa naša homogénna vlnová funkcia nemení s časom. Takéto je jej vonkajšie správanie: Správa sa pokojne. Lenže „pod kapotou“ sa naďalej krúti kvantová mašinéria: Elektrón *skúma všetky dráhy*, jeho kvantové stopky rotujú pozdĺž každej svetočiary. Propagátor tento nekonečný počet skúmaní zhŕňa. Ale, čuduj sa svete, keď propagátor dokončí svoju úlohu a my v každom bode koncovej vlnovej funkcie sčítame dokopy všetky drobné šípky, vlnová funkcia zostane – v tomto špeciálnom počiatočnom homogénnom prípade – nezmenená! Tvar propagátora, ktorý vedie k TOMUTO výsledku, je ten, ktorý hľadáme.

Ak nájdeme správny propagátor $K(D,E)$ pre voľnú časticu, budeme ho môcť aplikovať na HOCIJAKÚ počiatočnú vlnovú funkciu (v prípade voľnej častice). Tak zistíme, ako sa táto vlnová funkcia mení v čase. Prídeme k záveru, že väčšina vlnových funkcií sa s časom MENÍ!

IV. NÁJDENIE PROPAGÁTORA

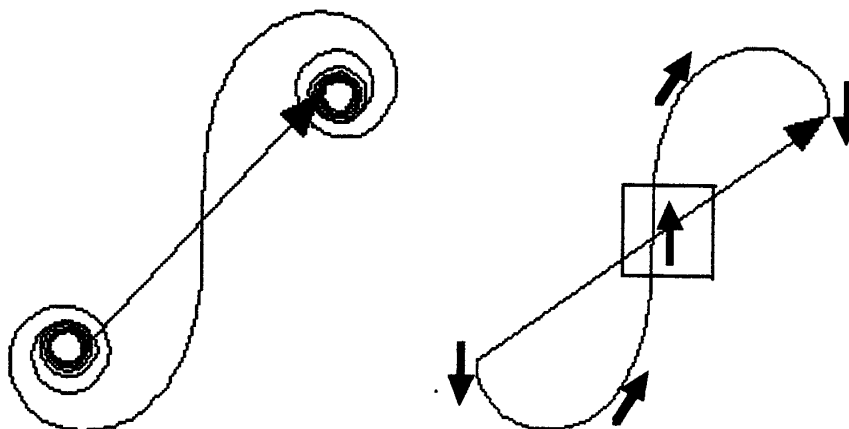
Program NÁJDENIE PROPAGÁTORA (FINDPROP) začína s jednoduchým propagátorom použitým v programe VLNOVÁ FUNKCIA (WAVEFUNCTION). Tento propagátor jednoducho otáča šípkou každého bodu na počiatkovej vlnovej funkcii pozdĺž priamej svetočiary do bodu koncovej vlnovej funkcie, bez toho, že by menil dĺžku tejto šípky. Budeme ho nazývať JEDNOTKOVÝ PROPAGÁTOR.

Obrázok 2 znázorňuje výsledok aplikovania takéhoto jednotkového propagátora. Počiatočná homogénna vlnová funkcia je zobrazená na spodku pozdĺž vodorovnej priamky $t = 0$. (Prečo sa táto vlnová funkcia na každom konci znižuje k nule? Pozri ďalej: Oddiel XI: Zopár vecí, ktoré by vás mohli zaujímať). Vyššie tri rady šípok znázorňujú výsledky aplikovania jednotkového propagátora v troch neskorších časoch. Rámček v pravej hornej časti obrazovky nás upozorňuje, že šípky týchto troch neskorších vlnových funkcií sú oveľa dlhšie než šípky počiatkovej vlnovej funkcie. Všimnite si tiež, že tieto neskoršie šípky smerujú pod určitým uhlom doprava namiesto priamo hore. Napokon si všimnite aj to, že tieto šípky menia dĺžku, pričom sa stávajú s ubiehajúcim časom čoraz dlhšie. Potrebujeme nájsť nový propagátor s "vhodným súčiniteľom", ktorý zvolíme tak, aby sme spomínané tri chyby odstránili. Vlnová funkcia sa bude potom ďalej vyvíjať bez zmeny. V ďalšom použijeme softvér NÁJDENIE PROPAGÁTORA (FINDPROP), a pomocou neho metódou pokusov a omylov nájdeme správny propagátor.



Obrázok 2: Výsledok aplikácie „jednotkového propagátora“ (ktorý bol použitý v programe WAVEFUNCTION na obrázku 1) na pôvodne homogénnu vlnovú funkciu pre tri neskoršie časy. Výsledné vlnové funkcie majú tri nedostatky: 1. ich šípky majú nesprávny smer; 2. šípky sú príliš dlhé (pozri rámček vpravo hore); 3. šípky sa s rastúcim časom zväčšujú. Metódou pokusov a omylov chceme nájsť upravený propagátor, ktorý dá neskoršie vlnové funkcie, ktoré budú vyzeráť rovnako ako pôvodná vlnová funkcia.

DISKUSNÁ OTÁZKA: Čo je zdrojom chýb „nesprávny smer“ a „príliš veľká dĺžka“ šípok v troch vyšších radoch na obrázku 2? Odpoveď skrýva obrázok 2 v kapitole *Svetočiary kvantovej častice*, ktorý tu uvádzame znovu ako obrázok 3:



Obrázok 3: (Upravený obrázok 2 z kapitoly *Svetočiary kvantovej častice*) Výsledná šípka pre množstvo alternatívnych dráh. Výsledná šípka pre (skoro) úplnú Cornuovu špirálu (vľavo) od veľkého počtu svetočiar, je (vpravo) nahradená šípkou, ktorá vznikne zložením príspevkov len od tých svetočiar, ktorých počet otáčok sa líši o pol-otáčku alebo menej od počtu otáčok prislúchajúceho priamej svetočiare. Zarámovaná hrubá čierna šípka v strede pravej časti obrázka pochádza od priamej svetočiary. Všimnite si jej relatívnu veľkosť a smer vzhľadom na výslednú šípku.

Po tom, čo ste sa pohrali s jednotkovým propagátorom, prejdite k POKUSNÉMU PROPAGÁTORU (TRIAL PROPAGATOR) a meňte jeho vlastnosti tak, aby šípky vlnovej funkcie:

1. ukazovali v správnom smere (prvá úloha) *a*
2. nemenili s ubiehajúcim časom svoju dĺžku (druhá úloha) *a*
3. mali takú istú dĺžku ako v pôvodnej homogénnej vlnovej funkcii (tretia úloha).

Kedykoľvek sa môžete prepnúť na SPRÁVNY PROPAGÁTOR (CORRECT PROPAGATOR) a pozrieť sa ako by mali vyzeráť správne výsledky (prinajmenšom uvidíte to, ako náš úbohý program aproximuje to, ako by veci mali vyzeráť!)

V. PRVÁ ÚLOHA: DOSIAHNITE, ABY BOLI NESKORŠIE ŠÍPKY ZVISLÉ

Spustite program a pozrite sa na počiatočnú vlnovú funkciu, ktorá je skoro pozdĺž celej obrazovky homogénna. (Nateraz ignorujte zúžený profil na oboch koncoch.) Kliknite na tlačidlo SPUSTIŤ (GO), a potom niekde nad počiatočnú vlnovú funkciu, aby ste videli ako dobre náš JEDNOTKOVÝ propagátor funguje. Mali by ste dostať niečo podobné ako znázorňuje obrázok 2.

Aby ste získali jasnejšiu predstavu o tom, čo sa deje, kliknite na ZMENIŤ ZOBRAZOVANIE (CHANGE DISPLAY), a potom na STREDNÝ BOD (CENTER DOT) (voľbu PYRAMÍDA (PYRAMID) zapnite alebo vypnite, tak ako vám to vyhovuje). Potom kliknite na OK. Kliknite znovu na SPUSTIŤ (GO), a potom klikajte v neskorších časoch nad

počiatočnú vlnovú funkciu. Bude sa zobrazovať len JEDNA výsledná šípka neskoršej vlnovej funkcie – šípka v strede.

Vašou prvou úlohou je dosiahnuť to, aby šípka neskoršej vlnovej funkcie ukazovala v správnom smere, konkrétne v smere nahor. Úlohu riešte tak, že počítaču prikážete, aby počiatočnú šípku, ešte predtým, ako ju začne otáčať pozdĺž priamej dráhy, otočil o nejaký počiatočný opravný uhol.

Kliknite na ZMENIŤ PROPAGÁTOR (CHANGE PROPAGATOR), potom na ZMENIŤ NA POKUSNÝ PROPAGÁTOR (CHANGE TO TRIAL PROPAGATOR), a potom na ZMENIŤ OPRAVNÝ UHOL (CHANGE OFFSET ANGLE). Vyberte nejaký uhol rôzny od nuly, kliknite na OK a vyskúšajte nový propagátor. Meňte opravný uhol dovtedy, kým nebudú šípky neskoršej vlnovej funkcie ukazovať nahor. Odpovedzte na nasledujúcu otázku, ktorá sa týka homogénnej počiatočnej vlnovej funkcie (červené číslo 1 v hornej ľavej časti obrazovky):

O1. Aká hodnota počiatočného opravného uhla spôsobí, že v neskoršej vlnovej funkcii budú šípky ukazovať v takom istom smere ako šípky počiatočnej homogénnej vlnovej funkcie?

VI. DRUHÁ ÚLOHA: DOSIAHNITE, ABY NESKORŠIE ŠÍPKY NEZÁVISELI NA ČASE

Našli sme počiatočný opravný uhol, ktorý spôsobuje to, že všetky neskoršie šípky ukazujú v správnom smere (priamo hore). PONECHAJTE túto hodnotu počiatočného opravného uhla nastavenú aj naďalej.

Našou druhou úlohou bude dosiahnuť, aby v prípade tejto špeciálnej homogénnej vlnovej funkcie šípky s ubiehajúcim časom nemenili svoju dĺžku. POZNÁMKA: Dĺžka sa nemusí rovnať 30, čo je dĺžka šípok počiatočnej vlnovej funkcie; tým sa budeme zaoberať až v tretej úlohe.

Aby chcete, aby sa neskoršie šípky nemenili s časom, musíte dosiahnuť, aby mal sám propagátor veľkosť, ktorá sa bude s časom meniť tak, že vykompenzuje zmenu dĺžky koncovej šípky, ktorá by sa inak objavila.

Ako by sa *mala* veľkosť propagátora meniť s časom? Predpokladáme, že hľadaná závislosť má tvar:

(veľkosť propagátora) $\sim$ (čas)^{exponent}

Musíte vyskúšať rôzne hodnoty exponenta, aby ste našli tú hodnotu, ktorá vedie k neskorším šípkam, ktoré s časom nemenia svoju dĺžku. Kliknite na ZMENIŤ PROPAGÁTOR (CHANGE PROPAGATOR) a overte si, že v položke POKUSNÝ PROPAGÁTOR (TRIAL PROPAGATOR) je nastavený ten počiatočný opravný uhol, ktorý ste

určili v oddieli V. Potom kliknite na tlačidlo ZMENIŤ ČASOVÚ ZÁVISLOSŤ (CHANGE TIME FUNCTION). Zvoľte nejaký exponent a potom vyskúšajte výsledný propagátor.

O2. Aká hodnota exponentu dáva vlnovú funkciu, ktorej prostredná šípka má s narastajúcim časom konštantnú dĺžku?

VII. TRETIA ÚLOHA: DOSIAHNITE, ABY MALI NESKORŠIE ŠÍPKY SPRÁVNU DĹŽKU

Doposiaľ sme zmenili propagátor voľnej častice tak, že neskoršie šípky ukazujú v správnom smere a majú dĺžku, ktorá sa s časom nemení.

Našou treťou úlohou bude dosiahnuť, aby mali šípky neskoršej vlnovej funkcie nielen dĺžku, ktorá sa nemení v čase, ale aj to, aby táto nemenná dĺžka bola rovnaká ako dĺžka šípok počiatočnej vlnovej funkcie. Dosiahneme to zmenou koeficientu, ktorý násobí propagátor.

Kliknite na ZMENIŤ PROPAGÁTOR (CHANGE PROPAGATOR) a overte si, či počiatočný opravný uhol a časový exponent majú hodnoty, ktoré ste určili v oddieloch V a VI. Potom kliknite na ZMENIŤ KOEFICIENT (CHANGE COEFICIENT) a vyberte hodnotu, o ktorej si myslíte, že v neskoršej vlnovej funkcii dá šípky rovnakej dĺžky. Skúšajte to dovtedy, pokým neskoršie šípky nebudú mať tú istú dĺžku ako počiatočné šípky, prinajmenšom blízko stredu homogénnej počiatočnej vlnovej funkcie (červené číslo 1 v hornom ľavom rohu obrazovky).

O3. Aký musí byť koeficient propagátora, ak majú mať šípky neskoršej vlnovej funkcie (približne) tú istú dĺžku ako šípky počiatočnej vlnovej funkcie?

VIII. ŠTVRTÁ ÚLOHA: DOSIAHNITE, ABY NESKORŠIE ŠÍPKY NEZÁVISELI NA HMOTNOSTI ČASTICE

Doposiaľ sme zmenili propagátor voľnej častice tak, že neskoršie šípky ukazujú v správnom smere, nemenia sa s časom, a majú pre počiatočnú voľbu hmotnosti častice správnu dĺžku.

My však chceme, aby náš propagátor dával správnu predpoveď neskoršej vlnovej funkcie, bez ohľadu na to, aká je hmotnosť častice. Samozrejme, naším prvotným klientom bol elektrón, ale kvantová mechanika musí fungovať aj pre častice iných hmotností.

Tak ako predtým predpokladajme, že sa propagátor mení s nejakou mocninou hmotnosti:

(veľkosť propagátora) $\sim$ (hmotnosť)^{HMOTNOSTNÝ exponent},

pričom *HMOTNOSTNÝ exponent* sa bude pravdepodobne líšiť od exponentu nájdeného pre časovú závislosť.

Kliknite na ZMENIŤ PROPAGÁTOR (CHANGE PROPAGATOR) a overte si, či sú všetky vaše predchádzajúce výsledky z oddielov V, VI a VII vložené v položke POKUSNÝ PROPAGÁTOR (TRIAL PROPAGATOR). Potom kliknite na ZMENIŤ FUNKCIU HMOTNOSTI (CHANGE MASS FUNCTION) a vyberte HMOTNOSTNÝ exponent funkcie hmotnosti.

Meňte teraz hmotnosť častice. Kliknite na tlačidlo ZMENIŤ VLNOVÚ FUNKCIU (CHANGE WAVEFUNCTION). Používajte iba hodnoty hmotnosti medzi $15m$ (elektrónu) a $100m$ (elektrónu). Skúšajte rôzne hodnoty hmotnostného exponentu, pokým nenájdete exponent, ktorý dáva, v prípade homogénnej vlnovej počiatočnej funkcie (červené číslo 1 hore vľavo na obrazovke) a v spomínanom rozsahu hodnôt hmotností, neskoršie šípky (približne!) tej istej dĺžky akú majú pôvodné šípky.

O4. Aká musí byť hodnota HMOTNOSTNÉHO exponentu, ak majú mať šípky neskoršej vlnovej funkcie tú istú dĺžku ako majú šípky v počiatočnej vlnovej funkcii, nezávisle na hmotnosti častice?

IX. PIATA ÚLOHA: APLIKUJTE PROPAGÁTOR NA INÉ VLNOVÉ FUNKCIE.

Pri odvodení propagátora voľnej častice, sme použili dosť nereálnu vlnovú funkciu – takú, ktorá je homogénna v celom priestore. Ale teraz, keď sme už odvodili správny propagátor, môžeme ho aplikovať na HOCIJAKÚ počiatočnú vlnovú funkciu voľnej častice a sledovať časový vývoj tejto funkcie. Toto budete robiť v piatej úlohe, pričom svoje výsledky zapíšete.

Overte si, či máte nastavené hodnoty, ktoré ste získali predtým. Potom vyberte SPRÁVNY PROPAGÁTOR (CORRECT PROPAGATOR) a aplikujte ho na vlnové funkcie #2 až #6. Meňte vlnové funkcie klikaním na tlačidlo ZMENIŤ VLNOVÚ FUNKCIU (CHANGE WAVEFUNCTION) a následne na tlačidlo ĎALŠIA VLNOVÁ FUNKCIA (NEXT WAVEFUNCTION). (O ostro zakončenej homogénnej vlnovej funkcii #2 sa môžete dozvedieť viac v ďalšom oddieli: Zopár vecí, ktoré by vás mohli zaujímať.)

PÔVODNE NASTAVENÉ HODNOTY (pozri aktuálne hodnoty vľavo dole na obrazovke) môžete zmeniť použitím tlačidla ZMENIŤ VLNOVÚ FUNKCIU (CHANGE WAVEFUNCTION), a nasledujúcich vhodných tlačidiel. Pôvodne nastavené hodnoty sú:

hmotnosť $M = 20 m$ (elektrónu)
Počet šípek $N = 69$
Šírka = 14 mikrometrov

mass $M = 20 m$ (elektrónu)
Number of arrows $N = 69$
Width = 14 micrometers

Dajte si pozor na to, aby ste použili „správny propagátor“.

O5. V prípade vlnovej funkcie #4 KVALITATÍVNE opíšte ako sa táto vlnová funkcia s červeným číslom 4 vyvíja v čase. Konkrétne:

O5A. Pohybuje sa PRIEMERNÁ poloha častice s časom? (ÁNO alebo NIE)
Čo je PRIEMERNÁ poloha častice? V každom čase existuje bod, z ktorého keď sa pozrieme naľavo i napravo, vyzerá vlnová funkcia „akosi rovnako“. Toto je priemerná poloha. Takže, pohybuje sa, alebo nie?

O5B. A čo PROFIL? Rozširuje sa s ubiehajúcim časom? (ÁNO alebo NIE).
PROFIL? Ako čas ubieha, dostávajú sa dlhšie šípky ďalej od priemernej polohy z otázky A?

O5C. Všimli ste si nejaký iný jav, ktorý je cenné zaznamenať? Ak áno, tak ho opíšte.)

O6. Zopakujte otázky O5A, B a C pre vlnovú funkciu #5 (namiesto #4)

O7. Zopakujte otázky O5 A, B a C pre vlnovú funkciu #6 (namiesto #4)

X. ZHRNUTIE VÝSLEDKOV

Rovnice (2) a (3) v časti I dávajú recept ako zostrojiť propagátor $K(D,E)$ medzi udalosťou emisie E a detekcie D:

$$K(D,E) = \begin{pmatrix} \text{"vhodný súčiniteľ"} \\ \text{pre dvojicu udalostí} \\ E \text{ (emisía)} \\ \text{a D (detekcia)} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \text{rotuj frekvenciou} \\ f = KE/h \text{ pozdĺž} \\ \text{PRIAMEJ dráhy} \\ \text{medzi E a D} \end{pmatrix} \quad (4)$$

Počiatočný skúšobný propagátor, ktorý sme nazvali JEDNOTKOVÝ PROPAGÁTOR, používal iba procedúru, ktorá je obsiahnutá v druhých zátvorkách na pravej strane rovnice (4). Nebral pritom do úvahy inštrukcie, ktoré by mohli byť obsiahnuté v prvých zátvorkách. Vďaka metóde pokusov a omylov, vieme teraz o „vhodnom súčiniteli“ v prvých zátvorkách tejto rovnice OVEĽA viac. Tento „vhodný súčiniteľ“ dovoľuje pomocou jedinej funkcie $K(D,E)$ nahradiť výsledok skúmania VŠETKÝCH dráh medzi E a D.

O8. Doplňte slová v nasledujúcich vetách, ktoré predstavujú príkazy pre propagátor $K(D,E)$, ktorými sa má riadiť pri vývoji počiatočnej šípky v udalosti emisie E, na drobnú koncovú šípku v udalosti detekcie D. Vaše inštrukcie by mali obsahovať výsledky, ktoré ste získali vo všetkých štyroch úlohách, keď ste hľadali správny propagátor. Buďte struční – propagátor je nedočkavá funkcia!

Hej, propagátor!—mám tu čosi pre teba! Medzi každým bodom na počiatkovej vlnovej funkcii a každým bodom na koncovej vlnovej funkcii:

1. Predtým ako začneš otáčať počiatkovú šípkou pozdĺž priamej svetočiary z E do D, otoč ju o počiatkový opravný uhol rovný...
2. Potom vynásob dĺžku malej šípky časovým faktorom...
3.
4.

Ak chcete vidieť matematický ekvivalent vašich slovných inštrukcií, pozrite si prílohu dole.

O9. PREDPOVEDZTE, čo spraví SPRÁVNY propagátor s počiatkovou vlnovou funkciou, ktorá je rovnaká ako homogénna vlnová funkcia so zrezanými koncami (vlnová funkcia #1), AŽ NA TO, že každá jej počiatková šípka je odchýlená o 30 stupňov od zvislého smeru. VYBERTE JEDNU odpoveď z nasledujúcich:

O9A. Počiatková vlnová funkcia sa v nasledujúcom čase bude vyvíjať bezo zmeny (v rovnakom priblížení v akom sa pôvodná vlnová funkcia #1 vyvíjala bezo zmien). Ak je to tak, zdôvodnite, prečo by to tak malo byť.
ALEBO

O9B. Počiatková vlnová funkcia sa bude meniť s časom. Ak je to tak, zdôvodnite, prečo by to takto malo byť.

XI. ZOPÁR VECÍ, KTORÉ BY VÁS MOHLI ZAUJÍMAŤ

Pri riešení štyroch úloh pre nájdenie propagátora, ste si pravdepodobne všimli niektoré nezvyčajné veci. Niekoľko z nich tu môžeme vysvetliť.

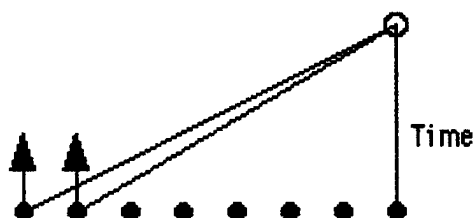
ZREZANÁ VLNOVÁ FUNKCIA. „Rovná“ počiatková vlnová funkcia, ktorú sme používali na nájdenie propagátora mala zrezané konce. Bez tohto zúženia vykazujú šípky neskoršej vlnovej funkcie jemne zvlnené nerovnosti. Môžete to pozorovať tak, že vyberiete SPRÁVNY PROPAGÁTOR (CORRECT PROPAGATOR), potom stlačíte ZMENÍŤ VLNOVÚ FUNKCIU (CHANGE WAVEFUNCTION) a potom tlačidlo ĎALŠIA VLNOVÁ FUNKCIA (NEXT WAVEFUNCTION). Výsledná vlnová funkcia (červené číslo 2 v rámečku vľavo hore na obrazovke) má ostré konce. Keď budete klikať na neskoršie časy, budú mať neskoršie vlnové funkcie šípky rôznej dĺžky, ako sa o tom môžete presvedčiť. Ostré nespojitosti na koncoch sa cez vlnovú funkciu šíria veľmi rýchlo. Je to fundamentálny výsledok kvantovej mechaniky: náhle prerušenia v sklone profilu vlnovej funkcie vedú k rýchlym zmenám vlnovej funkcie v čase. (toto je základ Schrödingerovej rovnice, ktorá dáva do súvisu zmeny sklonu vlnovej funkcie s jej zmenou v čase.)

NEPLATNÉ VLNOVÉ FUNKCIE. Môže sa vám stať, že narazíte na bláznivé vlnové funkcie vo veľmi blízkych časoch po počiatkovej vlnovej funkcii. Stáva sa to hlavne vtedy, keď má častica veľkú hmotnosť. Tento jav NEMÁ nič spoločné

s fundamentálnou fyzikou. Svoj pôvod má skôr v tom, že vlnovú funkciu reprezentujeme v počítači diskretnými rovnomerne rozloženými šípkami.

Napríklad výsledná šípka v strede neskoršej funkcie je zložená z príspevkov od všetkých šípek počiatkovej vlnovej funkcie. Každou z týchto šípek otáčame pozdĺž priamej svetočiary medzi počiatkovou šípkou a stredným bodom neskoršej vlnovej funkcie. Zvyčajne tieto príspevky, ak ich zložíme hlava k päte, vytvárajú Cornuovu špirálu, tak ako predtým na obrázku 3. Avšak plynulá Cornuova špirála vyjde iba vtedy, keď bude rozdiel otočení každých dvoch susedných šípek počiatkovej vlnovej funkcie malý.

Teraz si predstavte dve svetočiary, ktoré sa tiahnú od dvoch susedných šípek blízko jedného konca počiatkovej vlnovej funkcie ku strednému bodu v neskoršej vlnovej funkcii, ako je to zobrazené na tomto obrázku:



Ak je čas veľmi krátky, potom sú tieto dve šikmé svetočiary skoro vodorovné (častica prechádza značnú vzdialenosť vo veľmi krátkom čase). To však znamená vysokú rýchlosť. Vysoká rýchlosť znamená obrovskú kinetickú energiu. (Väčšia hmotnosť znamená taktiež väčšiu kinetickú energiu.) Veľká kinetická energia KE znamená vysokú frekvenciu otáčania $f = KE/h$. Takže šípky z konca počiatkovej vlnovej funkcie musia na ceste k centrálnej polohe neskoršej vlnovej funkcie urobiť veľa otáčok.

Ak je teraz ROZDIEL počtov otáčok dvoch susedných počiatkových šípek veľký, výsledkom je vyštrbená Cornuova špirála alebo úplné zničenie Cornuovej špirály. Môžete to pozorovať priamo následovne:

Stisnite tlačidlo ZMENIŤ VLNOVÚ FUNKCIU (CHANGE WAVEFUNCTION) a nastavte hmotnosť $100m$ (elektrónu). Vyberte voľbu STREDNÝ BOD (CENTRAL DOT) v okne ZMENIŤ ZOBRAZENIE (CHANGE DISPLAY). Potom použite SPRÁVNY PROPAGÁTOR (CORRECT PROPAGATOR) a „rovnú“ vlnovú funkciu #1 (so zrezanými koncami). Uvidíte, že pre krátke časy sa Cornuova špirála deštruuje.

Zhrnime: Aby sme sa vyhli bláznivým vlnovým funkciám v dôsledku použitia konečného počtu šípek, budeme sa vyhýbať nastaveniu veľmi malého časového intervalu, hlavne v prípade veľkej hmotnosti.

PRÍLOHA: PROPAGÁTOR VOĽNEJ ČASTICE V SYMBOLIKE KOMPLEXNÝCH ČÍSEL

NÁVRH: Zopakujte si úvod do komplexných čísel, ktorý nájdete v prílohe predchádzajúcej kapitoly tejto cvičebnice, ktorá sa volala Elektrón v prítomnosti potenciálu.

Šípku v udalosti emisie môžeme reprezentovať komplexným číslom, číslom ktoré má veľkosť (absolútna hodnota) a „smer“, niekedy nazývaný „fáza“. Aj drobnú šípku v udalosti detekcie, pochádzajúcu z tejto emisnej šípky, môžeme reprezentovať komplexným číslom. No a propagátor je tretie komplexné číslo, ktoré šípke v udalosti emisie povie, ako sa má „skrútiť a otočiť“, aby z nej bola šípka v udalosti detekcie.

Nuž, ako ste už objavili, propagátor zahŕňa počiatočný opravný uhol (úloha 1 hore), je funkciou času (úloha 2), a tiež je funkciou hmotnosti častice (úloha 4). Z toho dôvodu propagátor nie je komplexné číslo, ale **komplexná funkcia**, ktorá sa mení v závislosti na rozdieli časov a na hmotnosti častice. Rovnica (4) nám hovorí, že propagátor tiež obsahuje faktor, ktorý otáča počiatočnou šípku pozdĺž priamej svetočiary medzi emisiou a detekciou.

Nasledujúci propagátor pre voľnú časticu splňa všetky tieto podmienky:

$$K(D,E) = \left[\frac{m}{hT} \right]^{1/2} \exp\left(-i \frac{\pi}{4}\right) \exp\left(i \frac{\pi m X^2}{hT}\right) \quad (5)$$

kde X je priestorová vzdialenosť medzi udalosťou emisie a detekcie a T je časový interval medzi týmito dvoma udalosťami. Funkcia $\exp$ predstavuje e (základ prirodzených logaritmov) umocnené na to, čo je v zátvorkách, ktoré za ňou nasledujú. Takže pre tých čo majú ostrý zrak, môžeme rovnicu (54) prepísať do tvaru:

$$K(D,E) = \left[\frac{m}{hT} \right]^{1/2} e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{i\frac{\pi m X^2}{hT}} \quad (6)$$

Teraz sa pozrite na rovnice (5) a (6). Tí, ktorí ste sa už s komplexnými číslami stretli, si všimnete nasledujúce veci:

1. Imaginárne číslo i v exponente naznačuje, že tieto faktory vlastne reprezentujú otáčky a nie „exponenciálny“ nárast alebo pokles veľkosti.
2. Exponent $-i\pi/4$ reprezentuje počiatočný opravný uhol, mínus jednu osminu otáčky alebo mínus 45 stupňov, ktorý ste odvodili (dúfam že hej!) v úlohe 1.

3. Prevrátená druhá odmocnina $T^{-1/2}$ v začiatočných hranatých zátvorkách predstavuje výsledok, ktorý ste odvodili v úlohe 2.

4. Druhá odmocnina $m^{+1/2}$ v začiatočných hranatých zátvorkách predstavuje výsledok, ktorý ste odvodili v úlohe 4.

5. Druhý exponenciálny člen môžeme napísať ako imaginárne číslo i krát veličina:

$$\frac{\pi m X^2}{h T} = \frac{\pi m X^2}{h T^2} T = \frac{2\pi m X^2}{2h T^2} T = 2\pi \left(\frac{KE}{h} \right) T = 2\pi f T = 2\pi \left(\begin{array}{c} \text{počet} \\ \text{otáčok} \\ \text{pozdĺž priamej} \\ \text{svetočiary} \end{array} \right) \quad (7)$$

Pritom (KE) je klasická kinetická energia častice pozdĺž priamej svetočiary medzi emisiou a detekciou, a $KE/h = f$ je frekvencia f rotácie kvantových stopiek voľného elektrónu. (Pozri rovnicu 3 celku Voľný elektrón). Ak T je čas medzi emisiou a detekciou, potom fT je počet otáčok pozdĺž tejto priamej svetočiary. Prečo je v poslednom výraze na pravej strane rovnice (7) 2π ? Pretože imaginárny exponent e sa udáva v *radiánoch* a nie v počte otáčok. A na jednu otáčku pripadá 2π radiánov.

POZNÁMKA: Môžete tiež ukázať, že exponent sa dá zapísať tiež ako i krát veličina:

$$\frac{\pi m X^2}{h T} = \frac{2\pi S}{h} = \frac{S}{(h/2\pi)} = \frac{S}{\hbar},$$

kde S je klasický účinok vypočítaný pozdĺž priamej svetočiary a $\hbar \equiv h/2\pi$, sa nazýva „h-trans“, a má široké použitie vo fyzike. Ak sa chcete o tomto tvare presvedčiť, pozrite si rovnicu (17) v celku Princíp najmenšieho účinku pre prípad nulového potenciálu. ($g = 0$)

Takže komplexná reprezentácia propagátora voľnej častice v rovniciach (5) a (6) spĺňa všetky podmienky, ktoré sme pre tento propagátor našou metódou pokusov a omylov využijúc softvér NÁJDENIE PROPAGÁTORA (FINDPROP) odvodili.

JEDNODUCHÝ HARMONICKÝ OSCILÁTOR

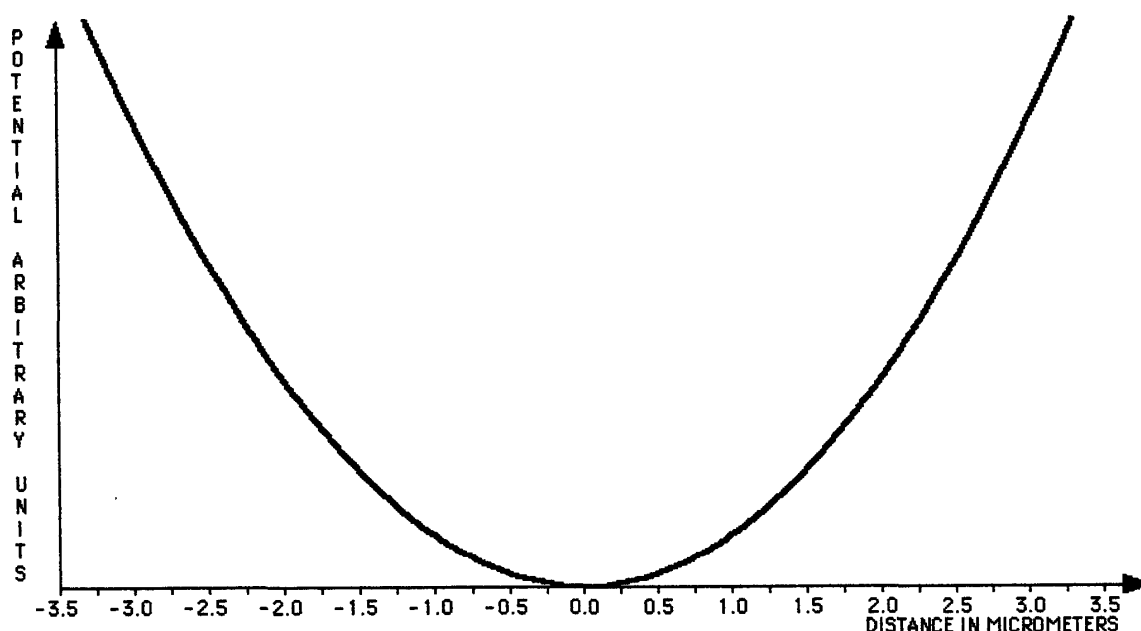
VIAZANÉ STAVY — KONEČNE!

Väčšina elektrónov okolo nás je viazaná v atómoch a molekulách—našťastie! Voľné elektróny sú životu nebezpečné. Rovnako aj nedostatok elektrónov. Užívate antioxidantné vitamíny, aby ste zabránili molekulám s príliš malým počtom elektrónov v zanesení vašich tepien?

Ale, čo sú to tie viazané stavy elektrónov? A prečo sú tieto viazané stavy tak STABILNÉ, a tak málo sa menia s ubiehajúcim časom? Skoro každý objekt okolo nás si udržiava svoj tvar, tvrdosť—aký je dnes, taký bude aj zajtra. Znovu: našťastie!

Nuž a čo majú viazané stavy s elektrónmi, ktoré skúmajú dráhy v priestoročase? Akým spôsobom propagátory, ktoré zahŕňajú výsledky skúmania všetkých dráh medzi počiatočnou a koncovou udalosťou v danom potenciáli, predpovedajú viazané stavy?

Jedným z najjednoduchších väzbových potenciálov je potenciál takzvaného jednoduchého harmonického oscilátora, alebo v skratke SHO (v angličtine: *Simple Harmonic Oscillator*). Potenciál SHO má tvar paraboly. Hodnota potenciálu rastie s druhou mocninou vzdialenosti od centra príťažlivosti, pričom vytvára akési "vedro" alebo "šálku", ktorá obsahuje a viaže nabitú časticu. Pozrite obrázok 1.



Obrázok 1: Potenciál jednoduchého harmonického oscilátora (SHO). Potenciálna energia je funkciou druhej mocniny vzdialenosti častice od stredu. Takýto potenciál možno použiť na viazanie voľnej častice.

V tejto kapitole budeme skúmať časticu viazanú v potenciáli SHO. Nežiadame od vás, aby ste našli propagátor pre SHO—je dosť komplikovaný! Namiesto toho, použijete softvér, v ktorom je tento propagátor už naprogramovaný. Vašou úlohou bude preskúmať dôsledky tohto propagátora pre časový vývoj rôznych počiatočných vlnových funkcií v prípade potenciálu SHO.

ČASŤ PRVÁ: HRÁME SA S PROGRAMOM SHO

Začneme tým, že sa trochu pohráme s programom SHO. NEODOVZDÁVAJTE výsledky tohto vášho počiatočného výskumu, ale ani ho nezanedbajte. Skvalitní vaše chápanie a pomôže vám vniknúť do cvičení, ktoré nasledujú. V tejto fáze nášho kurzu sme všetci výskumníkmi!

UPOZORNENIE: V tomto programe je VEĽA volieb, ktoré môžete vykonať. Nie je ťažké stratiť prehľad o tom čo sa deje. Ako pomôcku používajte menu nazývané PÔVODNÉ NASTAVENIE (DEFAULT) na vrchu obrazovky. Umožňuje vám pripomenúť si, aký potenciál, konštanty, parametre, a vlnové funkcie práve používate. Navyše sa môžete stlačením jedného tlačidla vrátiť k pôvodne nastaveným hodnotám. Naša rada: Menu PÔVODNÉ NASTAVENIE (DEFAULT) používajte často.

Vyskúšajte týchto zopár vecí:

PRÍPAD POTENCIÁLU SHO. Začnite pôvodne nastaveným potenciálom SHO—objaví sa po spustení programu. Stlačte tlačidlo ZMENIŤ VLNOVÚ FUNKCIU (CHANGE WAVEFUNCTION) a za ním tlačidlo VÝBRAŤ VLNOVÚ FUNKCIU (SELECT WAVEFUNCTION). Vyskúšajte všetky vlnové funkcie, označené písmenami od A až po K. Ako sa vyvíja každá z nich s ubiehajúcim časom v potenciáli SHO?

Stlačte ZMENIŤ ZOBRAZOVANIE (CHANGE DISPLAY) a vyskúšajte všetky tri režimy zobrazovania: ŠÍPKY (ARROWS), FARBA (COLOR) a PRAVDEPODOBNOŠŤ (PROBABILITY). Ako sa líšia obrázky na obrazovke pre tieto rozličné módy?

Vlnové funkcie označené F,G,H a I sa nazývajú STACIONÁRNE, t.j. nemenia sa s časom. ČO sa nemení s časom? Šípky? Farby? Pravdepodobnosť?

Ako sa s ubiehajúcim časom menia NESTACIONÁRNE vlnové funkcie v potenciáli SHO? Vráti sa každá z týchto počiatočných vlnových funkcií—alebo aspoň niektorá z nich—po nejakom čase do pôvodného tvaru?

Čím, ak vôbec niečím, sa vyznačujú vlnové funkcie J a K, ktoré sú označené ako SUPERPOZÍCIA (SUPERPOSITION)? Správajú sa odlišným spôsobom ako ostatné vlnové funkcie?

V okne ZMENIŤ VLNOVÚ FUNKCIU (CHANGE WAVEFUNCTION) zmeňte hmotnosť častice a v okne ZMENIŤ POTENCIÁL (CHANGE POTENTIAL) zmeňte klasickú periódu. Stlačte

tlačidlo KRESLI POTENCIÁL SHO (PLOT SHO POTENTIAL) v okne ZMENIŤ POTENCIÁL (CHANGE POTENTIAL) a pozrite sa, čo vaše zmeny spravili s grafom potenciálu.

PRÍPAD NULOVÉHO POTENCIÁLU. Zmeňte potenciál na nulový. Častica je potom voľná, pohybuje sa bez toho, aby na ňu vplýval ľubovoľný potenciál. PREDPOVEDZTE, čo sa v nulovom potenciáli s ubiehajúcim časom stane s každou z počiatočných vlnových funkcií. Svoje predpovede si overte.

Urobte znova VŠETKO popísané hore aj pre prípad nulového potenciálu. Sú "stacionárne" vlnové funkcie potenciálu SHO naďalej "stacionárne" v nulovom potenciáli?

ČASŤ DRUHÁ: CVIČENIA

POZNÁMKA 1: Neustále sa vracajte k pôvodnému nastaveniu (DEFAULT). Použite menu na vrchu obrazovky.

POZNÁMKA 2: V prípade výberu niektorých časových okamihov dostanete hlásenie NEPLATNÁ VLNOVÁ FUNKCIA (INVALID WAVEFUNCTION). Ak chcete vedieť prečo, stisnite tlačidlo REŠTART (RESTART) a menu CHYBA (ERROR). V prípade, že bude dôležité vedieť, čo sa v "neplatnom" čase deje, budete možno potrebovať tento čas preskúmať „z oboch strán“ a tak odhadnúť, čo sa v ňom v skutočnosti deje.

O1. Koľko času trvá šípkam v SHO stacionárnom stave #0 (vlnová funkcia F), kým sa otočia o JEDNU ŠTVRTINU otáčky? Aký čas potom potrvá šípkam v tomto stave, kým sa otočia o JEDNU CELÚ otáčku?, Aká je teda FREKVENCIA, nazvite ju f_0 , tejto rotácie, v megahertzoch? (V otázke O1 používate jednu štvrtinu otáčky preto, lebo celá otáčka trvá dlhšie, než je rozsah vertikálnej časovej škály.)

O2. Koľko času trvá šípkam v stacionárnom stave #1 SHO (vlnová funkcia G), pokým sa otočia o JEDNU CELÚ otáčku? Aká je teda frekvencia, nazvite ju f_1 , tejto rotácie? Odpovedzte v megahertzoch.

O3. Rovnaká otázka pre stacionárny stav #2 SHO (vlnová funkcia H). Frekvenciu označte f_2 .

O4. Rovnaká otázka pre stacionárny stav #3 SHO (vlnová funkcia I). Frekvenciu označte f_3 .

O5. Aká je hodnota KLASICKEJ frekvencie, nazvite ju f_{kl} , pre pôvodne nastavený potenciál SHO? Odpoveď odvoďte pomocou klasickej periódy T uvedenej na obrazovke vľavo, úplne dole.

O6. PREDPOKLADAJME, že ENERGIA E viazaného stavu je úmerná frekvencii f , s ktorou rotujú jeho šípky, podľa slávneho Einsteinovho vzorca $E = hf$, kde h je Planckova konštanta. Použite výsledky z otázok O1 až O5 a PREDPOVEDZTE

tvár všeobecného vzťahu pre energie stacionárnych stavov SHO. Vo vzťahu by mali vystupovať:

- a) symbol h pre Planckovu konštantu,
- b) symbol f_{kl} pre klasickú frekvenciu a
- c) symbol n pre číslo stacionárneho stavu ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$). Použite rovnaké číslovanie ako je to, použité v programe SHO.

POZNÁMKA: Stacionárnym stavom KAŽDÉHO väzbového potenciálu prislúchajú šípky, ktoré rotujú naraz, všetky tou istou frekvenciou. Navyše pre stavy s vyššou energiou rotujú tieto šípky VŽDY rýchlejšie. Avšak vzorec pre energiu ako funkciu čísla stavu n je pre rôzne potenciály rôzny. Príklad: V prípade Bohrovho atómu je energia úmerná MÍNUS $1/n^2$, kde n je kladné celé číslo začínajúce číslom jedna. Pre vlnové funkcie v trojrozmerných väzbových potenciáloch existuje zvyčajne viac než jedno kvantové číslo, napríklad pre veľkosť momentu hybnosti rovnako ako pre energiu.

O7. Vráťte sa k pôvodne nastaveným hodnotám, potom stlačte tlačidlo ZMENIŤ POTENCIÁL (CHANGE POTENTIAL) a po ňom tlačidlo ZMENIŤ PERIÓDU (CHANGE PERIOD). Zmeňte periódu na hodnotu 0,6 mikrosekundy. (Možno si budete chcieť nastaviť mriežku pomocou ZMENIŤ ZOBRAZOVANIE (CHANGE DISPLAY).) Teraz použite softvér, aby ste rozhodli, ktorý z diskutujúcich má pravdu. Rachel alebo Andrew? Pozri Poznámku #2 na začiatku tohto oddielu.

RACHEL hovorí: "Každá z vlnových funkcií pre zložené (superponované) stavy J a K sa vráti do svojho pôvodného tvaru za jednu periódu $T=1/f_d$ klasického harmonického oscilátora"

ANDREW hovorí: "Nie! Pre každý z týchto superponovaných stavov J a K sa do svojho pôvodného tvaru za jednu periódu vráti PRAVDEPODOBNOSŤ, ale nie VLNOVÁ FUNKCIA."

DISKUSIA: "ŠPLIECHAJÚCE STAVY"

(upravená výmena názorov so študentom)

PAUL SA PÝTA:

Trápi má jedna vec ohľadom nestacionárnych stavov: Môže sa v nich nachádzať aj elektrón viazaný v atóme? Predstavme si taký elektrón, ktorý sa pohybuje v oblasti bez potenciálu (viď vlnové funkcie C a D), a ktorý sa potom stretne s potenciálom (napríklad atómu). Dôsledkom toho bude, že jeho vlnová funkcia sa začne vyvíjať, ako to vidíme v prípade SHO. Takto vzniknuté vlnové funkcie nie sú stacionárne, hoci sa zdá, že zostávajú viazané okolo nulovej polohy. Vyzerá to teda tak, že viazaný elektrón môže byť aj v stavoch, ktoré nie sú stacionárne ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$). Sú to nejaké superpozície stacionárnych stavov?

EDWIN ODPOVEDÁ:

Paul, ste na stope niečoho dôležitého. Predstavte si vodu vo vedre. Môže sa v ňom zdanlivo celkom náhodne pohybovať zo strany na stranu. Môže však tiež s časom kmitať sínusoidálne s rôznymi diskretnými frekvenciami, pričom každej z týchto frekvencií prislúcha jedinečný vlnový profil.

Takisto je to v prípade elektrónu v potenciáli SHO (alebo v jednoelektrónovom atóme). Tiež sa môže zdanlivo celkom náhodne pohybovať zo strany na stranu. Alebo môže byť v stave, ktorého šípky rotujú naraz, všetky s tou istou frekvenciou. Tieto stavy, v ktorých sa všetky šípky točia naraz nazývame stacionárne stavy. Vlnové funkcie stacionárnych stavov prislúchajúcich potenciálu SHO sa líšia od tých, ktoré prislúchajú potenciálu v atóme. Avšak PRAVDEPODOBNOSŤ sa v prípade stacionárnych stavov v akomkoľvek potenciáli s časom vôbec nemení.

Ste však na stope niečoho ešte omnoho závažnejšieho: Každé "špliechajúce" vlnenie vody vo vedre môžeme zostrojiť premyslenou superpozíciou (sčítaním v každom bode) jednotlivých základných vlnení, ktoré sa s časom menia sínusoidálne. Rovnako každú "špliechajúcu" vlnovú funkciu elektrónu – v potenciáli SHO alebo v atóme – môžeme skonštruovať premyslenou superpozíciou (sčítaním šípk v každom bode) stacionárnych vlnových funkcií prislúchajúcich danému potenciálu.

FEYNMANOVE DIAGRAMY

... na jeseň roku 1940 mal Feynman na Graduate College v Princetone s Johnom Wheelerom (školiteľom jeho Ph.D. práce) telefonický rozhovor, v ktorom Wheeler nadhodil, že vie, prečo všetky elektróny majú ten istý náboj a tú istú hmotnosť. „Prečo?“, opýtal sa Feynman. Wheeler odpovedal: „Pretože všetky predstavujú jeden a ten istý elektrón“. [POZNÁMKA: Wheeler mal na mysli to, že tento jeden elektrón sa pohybuje po mnohých dráhach dopredu v čase ako elektrón, pričom sa každá takáto dráha niekde obráti a elektrón sa vracia SPÄŤ v čase ako pozitron – pozri QED strana 104. Množina dráh, po ktorých ide tento jeden elektrón v čase dopredu, reprezentuje všetky elektróny. Preto vo vesmíre existuje iba jeden elektrón. To je dokonalý príklad Wheelerovej fyzikálnej odvahy./EFT] ... „Ale profesor, veď neexistuje toľko pozitronov koľko elektrónov“. Wheeler reagoval: „Nuž, možno sú schované v protónoch alebo niečo podobné.“

Jagdish Mehra

A. ELEKTRÓNY A ICH INTERAKCIE

V 3. kapitole knihy QED Feynman dokazuje niektoré zo zjednodušujúcich predpokladov, ktoré urobil na začiatku knihy – ako je napríklad predpoklad, že čiastočný odraz fotónu sa koná na povrchoch skla. Potom podáva tézy fundamentálnej teórie kvantovej elektrodynamiky (Quantum Electrodynamics QED), za ktorú bol spolu s Julianom Schwingerom a Sin-Itirom Tomonagom v roku 1965 ocenený Nobelovou cenou. QED je rozhodne relativistickou teóriou, hlavne z týchto dvoch príčin: (1) hlavným aktérom je fotón, ktorý sa pohybuje rýchlosťou svetla a (2) počas procesov, ktoré táto teória popisuje dochádza k vzniku a zániku častíc.

Feynman zavádza významný zjednodušujúci nástroj, nazývaný **Feynmanove diagramy**. Použitím Feynmanovych diagramov, ako grafickej výpočtovej pomôcky, nestratia bežní doktorandi prehľad o všetkých možných spôsoboch, ktorými sa systém častíc môže z daného počiatočného stavu do iného koncového stavu vyvíjať. To znamená, že môžu započítať všetky „dráhy“. Význam slova dráha sme tu rozšírili tak, aby zahŕňalo aj spomínané Feynmanove diagramy.

Predstavte si nejaký elektrón. Vieme, že musí preskúmať všetky dráhy medzi fixovanými udalosťami emisie a detekcie. Teraz pridáme všetky možné INTERAKCIE, do ktorých môže elektrón pozdĺž každej z týchto svetočiar vstupovať, ako je napríklad emisia virtuálneho fotónu, ktorý potom neskôr sám absorbuje. (Slovné spojenie „virtuálny fotón“ znamená, že fotón nie je zachytený priamo, ale o jeho vzniku a zániku usudzujeme z jeho pôsobenia na elektrón.) Teória, ktorá popisuje tieto pridané interakcie sa nazýva kvantová elektrodynamika (QED). QED je rozšírením teórie skúmania všetkých dráh, ktorú sme študovali. A Feynmanove diagramy poskytujú nástroj pre toto rozšírenie.

Spolu s Feynmanovymi diagramami sa stretnete s pozitronom, ako s elektrónom, ktorý sa pohybuje späť v čase. Zdá sa, že táto interpretácia je správna, aj keď na začiatku viedla Johna Wheelera k tomu, že nesprávne predpokladal, že vo vesmíre existuje len jeden elektrón. (Pozri citát hore.)

B. CVIČENIA

(Pozrite si dve dôležité poznámky na konci otázky O7 dole.)

Otázky O1 až O7 sa vzťahujú k dvom diagramom na obrázku 59, na strane 93 knihy QED. Predpokladajme, že elektrón nemá spin. Použite nasledujúce hodnoty:

$$\begin{array}{ll} x_1 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}, & t_1 = 1 \cdot 10^{-3} \text{ s} \\ x_2 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}, & t_2 = 1 \cdot 10^{-3} \text{ s} \\ x_3 = 1 \cdot 10^{-3} \text{ m}, & t_3 = 6 \cdot 10^{-3} \text{ s} \\ x_4 = 7 \cdot 10^{-3} \text{ m}, & t_4 = 7 \cdot 10^{-3} \text{ s} \end{array}$$

Aby sme si mohli porovnať odpovede, PROSÍME POUŽIŤE nasledujúce presné hodnoty:

hmotnosť elektrónu = presne $9 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
 Planckova konštanta = $h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ kg}$

PRESNOSŤ: Prosíme zaokrúhlite všetky číselné výsledky na tri desatinné miesta.

ŠÍPKA PRE PRVÝ SPÔSOB

O1. Koľkokrát sa otočí ručička kvantových stopiek elektrónu, keď elektrón prejde z udalosti 1 do udalosti 3? (NÁVOD: Rovnica (2), na strane 24 tejto cvičebnice udáva výraz pre frekvenciu otáčania ručičky kvantových stopiek elektrónu, a hore uvedené hodnoty nám hovoria ako dlho ručička kvantových stopiek rotuje. Prípadne použite rovnicu (3) cvičebnice na strane 42 s hodnotou $PE = 0$)

O2. Koľkokrát sa otočí ručička kvantových stopiek elektrónu, keď elektrón prejde z udalosti 2 do udalosti 4?

Spomeňte si, že ak násobíme dve amplitúdy (dve malé kvantové šípky: QED, strana 61), tak výsledok má veľkosť danú SÚČINOM veľkostí oboch amplitúd, a jeho uhol je SÚČTOM oboch uhlov. PREDPOKLADAJTE, že v tomto prípade je veľkosť oboch elementárnych amplitúd rovná jednej.

O3. Aké je výsledné otočenie súčinu $E(1 \text{ do } 3) \cdot E(2 \text{ do } 4)$? Tento výsledok nám dá smer „šípky pre prvý spôsob“, ktorú Feynman spomína hneď nad obrázkom 59, na strane 93 knihy QED.

ŠÍPKA PRE DRUHÝ SPÔSOB

O4. Odpovedzte na otázku O1 ak elektrón ide z udalosti 1 do udalosti 4.

O5. Odpovedzte na otázku O2 ak elektrón ide z udalosti 2 do udalosti 3.

O6. Odpovedzte na otázku O3, tentoraz pre súčin $E(1 \text{ do } 4) * E(2 \text{ do } 3)$. Tak získate smer „šípky pre prvý spôsob“, ktorú Feynman spomína pod obrázkom 59, na strana 93 knihy QED.

VÝSLEDNÁ ŠÍPKA

O7. Teraz obidve šípky, ktoré ste vypočítali v otázkach O3 a O6 sčítajte. Znamená to sčítať malé šípky AKO ŠÍPKY. Nezabudnite, že veľkosť každej takejto malej šípky je jedna. Aká je PRIBLIŽNÁ hodnota dĺžky šípky, ktorá je výsledkom tohto sčítania?

DVE DÔLEŽITÉ POZNÁMKY:

POZNÁMKA č.1: Pri rozbere (napríklad) ľavej časti obrázka 59, na strane 93, násobíme amplitúdy súbežných nezávislých udalostí $E(1 \text{ do } 4) * E(2 \text{ do } 3)$. Toto násobenie bolo pôvodne vysvetlené v QED na strane 72. V kvantovej mechanike násobíme AMPLITÚDY. Naproti tomu v klasickej fyzike násobíme PRAVDEPODOBNOSTI. Dajme tomu, že Bill Emmons si hodí mincu v Anchorage na Aljaške a Carlos Gunter si hodí mincu v New Orleans v Louisiane. Tieto dva hody sú nezávislé – povieme, že sú „súbežné“. V každom hode je pravdepodobnosť $1/2$, že padne hlava (mince). Pravdepodobnosť toho, že na OBIDVOCH minciach padne hlava je $(1/2) * (1/2)$. Jednoducho násobíme pravdepodobnosti.

(Toto vedie k vtipu o štatistikovi, ktorý keď letel, vždy nosil do lietadla bombu. Dôvod jeho počínania: Šanca, že v lietadle budú DVE bomby naraz je zanedbateľne malá, keďže je to SÚČIN dvoch veľmi malých pravdepodobností.)

V kvantovej mechanike, naproti tomu, násobíme nie pravdepodobnosti, ale AMPLITÚDY. Potom neskôr, keď chceme vypočítať pravdepodobnosť, zoberieme DRUHÚ MOCNINU VEĽKOSTI konečnej amplitúdy. (Šípky sa môžu vyrušiť, ale pravdepodobnosti nie – TOTO je veľký rozdiel medzi klasickou a kvantovou fyzikou.)

POZNÁMKA č.2: Dva zdroje 1 a 2 na obrázku 59 sú nezávislé. To znamená, že POČIATOČNÝ ŠARTOVACÍ uhol ručičiek oboch kvantových stopiek pravdepodobne NIE JE taký istý. Stopky v emisii 1 môžu na začiatku ukazovať na nulu (smer priamo hore), zatiaľ čo stopky v emisii 2 môžu na začiatku ukazovať deväťdesiat stupňov od smeru priamo nahor. Hovoríme, že tieto dva zdroje sú NEKOHERENTNÉ. Pokaží to náš predchádzajúci rozbor? Nie. Dôvod je v tom, že tým sa len k obom amplitúdam $E(1 \text{ do } 3) * E(2 \text{ do } 4)$ a $E(1 \text{ do } 4) * E(2 \text{ do } 3)$ pripočíta rovnaký uhol ϕ . Lenže keď počítame pravdepodobnosť berieme druhú mocninu veľkosti súčtu. Preto tieto ROVNAKÉ pripočítané uhly nič na výsledku nezmenia.

V reči komplexných čísel (strana 46 tejto cvičebnice) to znamená, že spoločný uhol sa prejaví v tom, že každý súčiniteľ vynásobíme číslom $e^{i\phi}$, ktoré môžeme tiež

zapísať ako $\exp(i\varphi)$. Tento spoločný faktor možno zo súčtu amplitúd vybrať pred zátvorku. Jeho veľkosť je jedna, takže jej druhá mocnina nemení nič na výslednej pravdepodobnosti.

(KONIEC poznámok č.1 a č.2)

Otázka O8 sa vzťahuje na obrázok 60, na strane 40 knihy QED. Pozrite sa na ľavý diagram na tomto obrázku a na výraz pre zodpovedajúcu amplitúdu daný v treťom a štvrtom riadku od spodku na strane 94.

O8. Napíšte zodpovedajúci výraz pre amplitúdu pre pravý diagram na obrázku 60!

Otázky O9 až O14 sa vzťahujú na obrázok 68, na strane 104 knihy QED:

O9. Všetkých šesť svetočiar prichádza do udalosti detekcie A v rovnakom čase. Lenže cestovanie pozdĺž všetkých šiestich svetočiar nastáva rovnakou rýchlosťou – rýchlosťou svetla. Ako je potom možné, že zodpovedajúcich šesť udalostí emisie nastalo v rôznych časoch?

O10. Keď v prípade skla sčítame šesť malých šípok zobrazených na obrázku 68, na strane 104, dostaneme približne štvrtinu kružnice (uhol 90 stupňov) s polomerom 0,2. Aká je dĺžka výslednej šípky?

O11. Aká je pravdepodobnosť detekcie pre túto hrúbku skla?

O12. O koľko VIAC šípok (zodpovedajúcich zväčšenej hrúbke skla) by sme museli pridať, aby sme dostali nulovú celkovú amplitúdu?

O13. Aká je táto nová hrúbka skla, zodpovedajúca nulovému odrazu, v porovnaní s tou ktorá je znázornená na obrázku? Je taká istá? Polovičná? Dvakrát taká hrubá? ... taká hrubá?

O14. Závisí vo všeobecnosti dĺžka výslednej šípky pre odraz na hrúbke skla?

POZNÁMKA: V prípade otázok O15 až O17 napíšte svoju odpoveď pomocou tam uvedených veličín. Pokiaľ výsledok nie je nula, nie sú požadované žiadne numerické odpovede.

O15. Fotón je emitovaný v udalosti 1 a druhý fotón je emitovaný v udalosti 2 (Obrázok 71, strana 111). Zapište výslednú AMPLITÚDU toho, že OBIDVA fotóny dosiahnu udalosť 3! Vyjadrite túto výslednú amplitúdu pomocou amplitúd $P(1 \text{ do } 3)$ a $P(2 \text{ do } 3)$. (Symboliku pozrite v QED.)

O16. Zapište výraz pre PRAVDEPODOBNOSŤ toho, že obidva fotóny dôjdu do udalosti 3. Použite amplitúdu odvodenú v O15.

O17. Elektrón je emitovaný v udalosti 1 a iný elektrón je emitovaný v udalosti 2 (obrázok 72, strana 112). Zapíšte výslednú AMPLITÚDU toho, že OBIDVA elektróny dosiahnu udalosť 3? Vyjadrite túto výslednú amplitúdu pomocou amplitúd $E(1 \text{ do } 3)$ a $E(2 \text{ do } 3)$.

O18. Zapíšte výraz pre PRAVDEPODOBNOSŤ toho, že obidva elektróny dôjdu do udalosti 3. Použite amplitúdu odvodenú v O17.

O19. Obrázok 75 na strane 117 znázorňuje Feynmanove diagramy, z ktorých každý zahŕňa ŠTYRI interakcie navyše, teda štyri ďalšie priesečníky, okrem toho, ktorý je znázornený na pôvodnom diagrame na obrázku 73. Obrázok 76 na strane 118 znázorňuje niekoľko príkladov Feynmanových diagramov, ktoré všetky zahŕňajú ŠEŠŤ interakcií navyše. Prečo v knihe nie je uvedený obrázok, ktorý by znázorňoval Feynmanov diagram s piatimi INTERAKCIAMI navyše?

O20. Dajme tomu, že máte danú každú z amplitúd vypočítaných z Feynmanových diagramov na obrázkoch 73, 74 a 75, menovite amplitúd toho, že elektrón vyjde z udalosti 1 a dôjde do udalosti 2, pričom medzitým absorbuje prichádzajúci fotón. Ako by ste použili tieto jednotlivé amplitúdy, ak by ste chceli nájsť celkovú amplitúdu procesu s presnosťou do „štyroch väzieb navyše“ (obrázok 75) ?

O21. Prečo výpočet opísaný v O20 vedie k veľmi presnému výsledku, aj keď ignorujeme komplikovanejšie procesy („šesť väzieb navyše“, „osem väzieb navyše“, atď.)

O22. Prečo neboli doteraz vypočítané amplitúdy pre komplikovanejšie procesy spomenuté v O21 (zatiaľ odložte bokom otázku nepresnej znalosti interakčnej konštanty j)?

Odkaz na citát v úvode tejto kapitoly:

Jagdish Mehra, *The Beat of a Different Drum, The Life and Science of Richard Feynman*, Oxford, 1994, strany 113-115.

Mr. Taylor, Interference fringes with feeble light.

Interference fringes with feeble light.

By G. I. Taylor, B.A., Trinity College. (Communicated by Professor Sir J. J. Thomson, F.R.S.)

[Read 25 January 1909.]

The phenomena of ionization by light and by Röntgen rays have led to a theory according to which energy is distributed unevenly over the wave-front (J. J. Thomson, *Proc. Camb. Phil. Soc.* XIV. p. 417, 1907). There are regions of maximum energy widely separated by large undisturbed areas. When the intensity of light is reduced these regions become more widely separated, but the amount of energy in any one of them does not change ; that is, they are indivisible units.

So far all the evidence brought forward in support of the theory has been of an indirect nature; for all ordinary optical phenomena are average effects, and are therefore incapable of differentiating between the usual electromagnetic theory and the modification of it that we are considering. Sir J. J. Thomson however suggested that if the intensity of light in a diffraction pattern were so greatly reduced that only a few of these indivisible units of energy should occur on a Huygens zone at once the ordinary phenomena of diffraction would be modified. Photographs were taken of the shadow of a needle, the source of light being a narrow slit placed in front of a gas flame. The intensity of the light was reduced by means of smoked glass screens.

Before making any exposures it was necessary to find out what proportion of the light was cut off by these screens. A plate was exposed to direct gas light for a certain time. The gas flame was then shaded by the various screens that were to be used, and other plates of the same kind were exposed till they came out as black as the first plate on being completely developed. The times of exposure necessary to produce this result were taken as inversely proportional to the intensities. Experiments made to test the truth of this assumption showed it to be true if the light was not very feeble.

Five diffraction photographs were then taken, the first with direct light and the others with the various screens inserted between the gas flame and the slit. The time of exposure for the first photograph was obtained by trial, a certain standard of blackness being attained by the plate when fully developed. The remaining times of exposure were taken from the first in the inverse ratio of the corresponding intensities. The longest time was 2000 hours or about 3 months. In no case was there any diminution in the sharpness of the pattern although the plates did not all reach the standard sharpness of the first photograph.

In order to get some idea of the energy of the light falling on the plates in these experiments a plate of the same kind was exposed at a distance of two meters from a standard candle till complete development brought it up to the standard of blackness. Ten seconds sufficed for this. A simple calculation will show that the amount of energy falling on the plate during the longest exposure was the same as that due to a standard candle burning at a distance slightly exceeding a mile. Taking the value given by Drude for the energy in the visible part of the spectrum of a standard candle, the amount of energy falling on 1 square centimeter of the plate is 5×10^{-6} ergs per sec. and the amount of energy per cubic centimeter of this radiation is 1.6×10^{-10} ergs.

According to Sir J. J. Thomson this value sets an upper limit to the amount of energy contained in one of the indivisible units mentioned above.

Reference:

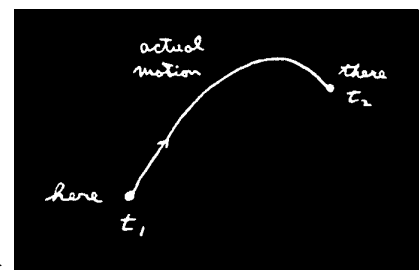
G.I. Taylor, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 15, (114-115) (1909)

Princíp najmenšieho účinku

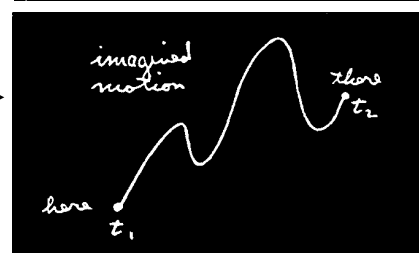
TOTO JE TAKMER DOSLOVNE ŠPECIÁLNA PREDNÁŠKA*

Na strednej škole si ma raz po hodine fyziky zavolať môj učiteľ (pamätám sa, že sa volal Bader a povedal mi: „Vyzeráš znudený, a preto by som ti chcel povedať niečo zaujímavé.“ Potom mi povedal niečo, čo ma celkom uchvátilo a čo ma dodnes fascinuje. Vždy, keď sa s týmto problémom stretnem, pustím sa vážne do práce. Aj teraz, keď som si začal pripravovať prednášku, som zistil, že som sa viac ako inokedy pustil do rozboru tohto problému. Namiesto prípravy prednášky som sa ponoril do nového problému. Predmet, o ktorom hovorím, je princíp najmenšieho účinku.

Môj učiteľ fyziky mi povedal toto: „Ak budeš mať nejakú časticu (napr. v gravitačnom poli), tá sa začne kdesi pohybovať a pôjde voľne k nejakému inému bodu; vyhodíš ju a ona pôjde nahor a potom padne dole. —————>

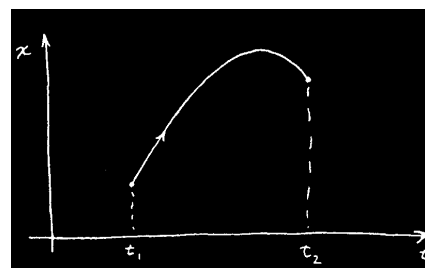


Ide z pôvodného miesta ku konečnému miestu a tento pohyb trvá určitú dobu. Teraz skús nejaký iný pohyb. Nech sa na svojej ceste odtiaľ tam pohybuje častica tak, ako je to znázornené na druhom obrázku, —————> ale doba trvania pohybu je rovnaká ako v prvom prípade“. A potom môj učiteľ dodal: „Ak vypočítaš, akú má častica na dráhe v každom okamihu kinetickú energiu, ak odpočítaš potenciálnu energiu a integruješ podľa času cez taký interval, ktorý zodpovedá prejdenu celú dráhu, dostaneš číslo, ktoré je *väčšie* ako číslo zodpovedajúce skutočnému pohybu. Ináč povedané: Newtonove zákony by nemali byť formulované v tvare $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, ale v tvare, ktorý odráža skutočnosť, že stredná kritická energia bez strednej potenciálnej energie má najmenšiu hodnotu na tej dráhe, po ktorej sa predmet v skutočnosti pohybuje od jedného miesta k druhému.“



Vysvetlíme si bližšie, čo to vlastne znamená. Ak sa budeme zaujímať o pohyb v gravitačnom poli, tak pri pohybe častice po dráhe $x(t)$ (najprv budeme uvažovať len jednorozmerný problém a budeme predpokladať, že častica sa pohybuje len nahor a nadol, a nie do boku), kde x je výška nad zemou, sa bude kinetická energia rovnáť $\frac{1}{2}m(dx/dt)^2$ a potenciálna energia

sa bude bez ohľadu na čas rovnáť mgx . Vezmime teraz rozdiel kinetickej a potenciálnej energie v každom okamihu pohybu a integrujeme tento výraz podľa času od začiatočného do konečného okamihu. Predpokladajme, že v začiatočnom čase t_1 začínal pohyb v určitej výške a v konečnom čase t_2 skončil pohyb v nejakom inom mieste. —————>

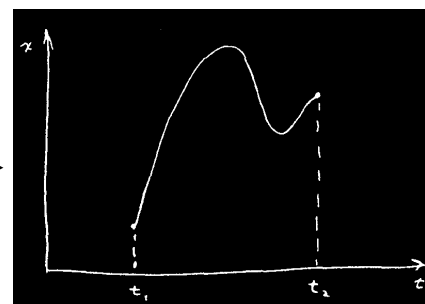


Potom máme do činenia s integrálom

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - mgx \right] dt$$

Skutočný pohyb sa deje po určitej krivke (ak vyjadrujeme závislosť od času, ide o parabolu) a dostávame preň určitú hodnotu uvedeného integrálu. Môžeme si však predstaviť nejaký iný pohyb, ktorý by išiel hore a dole nejakým nezvyčajným spôsobom. —————>

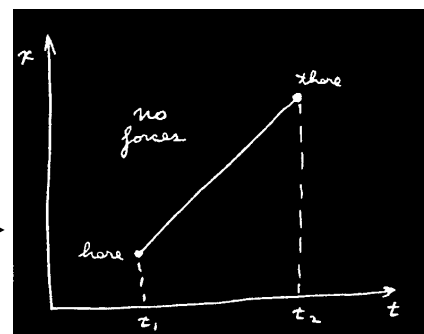
Pre takýto pohyb potom môžeme vypočítať rozdiel kinetickej a potenciálnej energie a tento rozdiel integrovať po znázornenej dráhe... alebo po akejkolvek inej dráhe. Podstatné je, že tou pravou dráhou je tá, pre ktorú má tento integrál najmenšiu hodnotu.



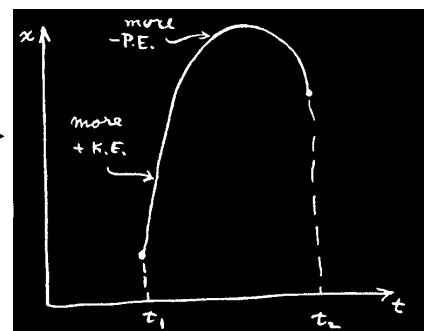
* Ďalšie kapitoly nie sú závislé od tejto špeciálnej prednášky, ktorá je určená tak trochu na "pobavenie".

Vyskúšajme to. Najprv si všimnime pohyb voľnej častice, ktorá nemá žiadnu potenciálnu energiu. Pravidlo potom hovorí, že pri pohybe z jedného miesta na druhé miesto v danej dobe musí byť integrál z kinetickej energie najmenší, takže sa pohyb musí diať konštantnou rýchlosťou. (My už vieme, že správnou odpoveďou je pohyb konštantnou rýchlosťou.) Prečo je to tak? Preto, lebo pri inom pohybe častice by boli rýchlosti niekedy väčšie a niekedy menšie, ako je priemer. Lenže priemerná rýchlosť je vždy rovnaká, lebo všetky tie pohyby z jedného miesta na druhé sa uskutočňujú v rovnakom čase.

Ako príklad vám posluží situácia, keď máte ísť z domu do školy autom a cesta vám má trvať určitý čas. Cestu môžete uskutočniť rôznymi spôsobmi. Na začiatku môžete divoko zrýchľovať a pred koncom silne brzdiť, alebo môžete ísť konštantnou rýchlosťou, alebo môžete ísť chvíľu spiatočkou a potom opäť dopredu, alebo si môžete zvoliť ešte iné spôsoby. Dôležité je, že priemernou rýchlosťou je podiel prejdenej vzdialenosti a času potrebného na cestu. Okrem prípadu konštantnej rýchlosti vždy pôjdete tak, že niekedy pôjdete príliš rýchlo a niekedy príliš pomaly. Lenže stredná hodnota zo štvorcov hodnôt, ktoré sa líšia od priemeru, je, ako viete, vždy väčšia ako štvorec zo strednej hodnoty, a preto integrál z kinetickej energie bude vždy väčší pri kolísaní rýchlosti ako pri konštantnej rýchlosti. Vidíme teda, že integrál má minimum, ak je rýchlosť konštantná (keď niet silového pôsobenia). Správna dráha potom vyzerá takto:



Predmet hodený nahor v gravitačnom poli sa najprv pohybuje rýchlo, ale potom stále pomalšie. Je to preto, lebo má aj potenciálnu energiu a najmenší musí byť rozdiel kinetickej a potenciálnej energie. Pretože potenciálna energia vzrastá s výškou, bude rozdiel čo najmenší, ak sa čo najrýchlejšie dostaneme nahor, kde je veľká potenciálna energia. Potom ak odpočítame od kinetickej energie potenciálnu, dostaneme menšiu strednú hodnotu. Výhodnejšia je taká dráha, ktorá ide nahor a pri ktorej sa veľa odčítava vďaka veľkej potenciálnej energii.



Lenže nahor nemožno ísť príliš rýchlo alebo príliš vysoko, lebo potom by tam bolo príliš veľa kinetickej energie. Treba ísť dosť rýchlo, aby bolo možné vrátiť sa dole v určenom čase. Nechceme teda ísť príliš vysoko, ale kamsi predsa len ísť chceme. Riešenie je teda istým druhom rovnováhy medzi snahou o získanie čo najväčšej potenciálnej energie pri čo najmenšom prírastku kinetickej energie. Ide o to, aby bol rozdiel kinetickej a potenciálnej energie čo najmenší.

To je všetko, čo mi povedal môj učiteľ. Viac mi nepovedal, lebo to bol dobrý učiteľ a vedel, kedy treba prestať. Táto vlastnosť mi však chýba, a tak vám namiesto zaujímavej poznámky strpčím život tým, že sa pokúsim dokázať správnosť tohto tvrdenia. Matematický problém, ktorý budeme riešiť, je ťažký a nezvyklý. Budeme uvažovať veličinu nazývanú účinok S . Je to rozdiel kinetickej a potenciálnej energie integrovaný podľa času

$$\text{účinok} = S = \int_{t_1}^{t_2} (KE - PE) dt$$

Musíte si uvedomiť, že PE aj KE sú funkcie času. Pre rôzne možné dráhy bude nadobúdať účinok rôzne hodnoty. Našou matematickou úlohou je nájsť, pre ktorú krivku je toto číslo najmenšie.

Možno poviete: „To je obyčajný výpočet maxima a minima. Treba vypočítať účinok a derivovaním nájsť minimum“.

Lenže pozor! Obyčajne máte funkciu nejakej *premennej* a hľadáte hodnotu premennej, pri ktorej je funkcia najmenšia alebo najväčšia. Môžeme mať napr. tyč, ktorá bola nahriata v strede a odtiaľ sa teplo šíri ďalej. Každý bod tyče bude mať určitú teplotu a máme nájsť bod, v ktorom je teplota najväčšia. My však pre každú dráhu v priestore máme určité číslo (teda niečo celkom iné)

a hľadáme takú dráhu v priestore, pre ktorú je toto číslo najmenšie. Takáto úloha patrí do celkom inej oblasti matematiky. To už nieje obyčajný integrálny a diferenciálny počet. Takéto výpočty patria do *variačného počtu*.

Problémov tohto typu je v matematike veľa. Napríklad kružnica je obyčajne definovaná ako geometrické miesto bodov v rovine, ktoré sú rovnako vzdialené od daného bodu. Existuje však aj iná definícia kružnice. Kružnica je taká krivka danej dĺžky, ktorá obopína najväčšiu plochu. Každá iná krivka s rovnakým obvodom obopína menšiu plochu ako kružnica. Ak teda stanovíme problém nájsť krivku, ktorá pri danom obvode obopína najväčšiu plochu, dostaneme úlohu variačného počtu, čo je niečo celkom iné ako úlohy, na ktoré sme boli zvyknutí.

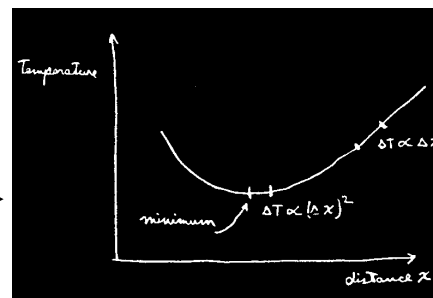
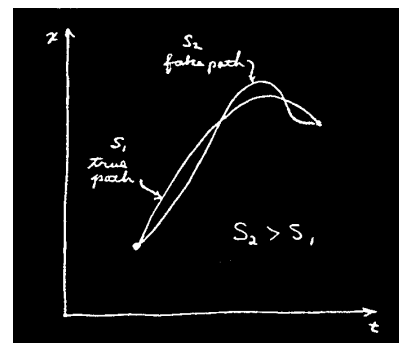
Budeme teda počítať dráhu, ktorú prejde teleso. Urobíme to nasledujúcim spôsobom. Predstavíme si, že existuje tá pravá dráha a všetky ostatné dráhy sú nepravé. Ak budeme počítať účinok pre nepravú dráhu, dostaneme väčšiu hodnotu ako pri výpočte účinku pre pravú dráhu.

Našou úlohou je nájsť tú pravú dráhu. Kde taká dráha leží? Jeden zo spôsobov určenia spočíva v tom, že budeme počítať účinok pre milióny a milióny dráh a budeme skúmať, pre ktorú dráhu je účinok najmenší. Keď to zistíme, nájdeme pravú dráhu.

Takto by sme naozaj mohli postupovať. Môžeme však urobiť niečo lepšie. Ak ide o veličinu, ktorá má minimum (z obyčajných funkcií napr. teplotu), môžeme využiť tú vlastnosť minima, že pri vzdďalovaní sa od minima na vzdialenosť *prvého* rádu, sa zmení hodnota funkcie iba o veličinu, ktorá je *druhého* rádu. V ktoromkoľvek inom bode krivky sa pri malej zmene premennej zmení hodnota funkcie o veličinu, ktorá je aj *prvého* rádu. Lenže v minime posun o malú vzdialenosť nespôsobuje v prvom priblížení žiadne zmeny funkcie.

Toto využijeme pri výpočte pravej dráhy. Ak je dráha pravá, tak krivka, ktorá sa od nej iba nepatrne líši, nebude mať v prvom priblížení inú účinkovú funkciu. Ak ide naozaj o minimum, tak sa rozdiely objavajú až v druhom priblížení.

Dá sa to ľahko dokázať. Ak nejakým spôsobom odchýlime krivku tak, aby zmena bola *prvého* rádu, zmení sa *úmerne* tomu odchýleniu aj účinok. Pri tejto zmene sa účinok stáva s najväčšou pravdepodobnosťou väčší, lebo ináč by nešlo o minimum. Ak je však zmena *úmerná* odchýleniu, pri zmene znamienka by vlastne zmenšovala účinok. Dostali by sme situáciu, keď účinok rastie pri odchýlení na jednu stranu a klesá pri odchýlení na opačnú stranu. Je len jedna možnosť, aby to bolo naozaj minimum, a to tá, že v prvom priblížení nedochádza k zmenám a zmeny sú *úmerne* druhej mocniny odchýlky od pravej dráhy.



Oveľa ťažšie sa rieši problém, v ktorom vystupuje aj vektorový potenciál. Variácie sú omnoho zložitejšie. Nakoniec však dostanete také vyjadrenie sily, aká v tom výraze má skutočne byť, t.j. $q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$. S tým sa však už musíte pohrať sami.

Chcel by som upozorniť na to, že vo všeobecnom prípade (napr. v relativistickom vzťahu) už účinkový integrál neobsahuje rozdiel kinetickej a potenciálnej energie. To platilo len v nerelativistickom priblížení. Napríklad výraz $m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}$ už nie je tým, čo nazývame kinetickou energiou. To, ako má vyzeráť účinok v ľubovoľnom, ale konkrétnom prípade, sa musí určiť vlastne skusmo. Je to úloha takého typu ako určenie pohybových rovníc. Musíte sa proste pohrať so známymi rovnicami a snažiť sa vyjadriť ich prostredníctvom princípu najmenšieho účinku.

Ešte jedna terminologická poznámka. Funkciu, ktorú integrujeme v čase, aby sme dostali účinok S , nazývame *lagranžian* L a ten je funkciou iba

rýchlostí a polôh častíc. Princíp najmenšieho účinku teda možno písať aj v tvare

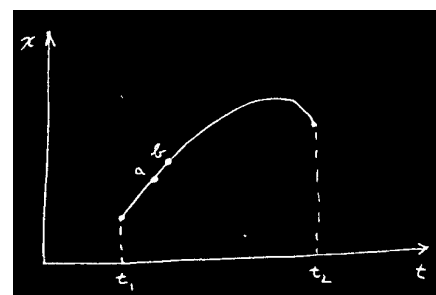
$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(x_i, v_i) dt$$

kde pod x_i a v_i rozumieme všetky zložky polôh a rýchlostí. Ak teda budete počuť o lagranžiáne, už budete vedieť, že ide o funkciu, pomocou ktorej sa hľadá účinok. Pri relativistickom pohybe v elektromagnetickom poli platí

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} - q(\varphi + \mathbf{v} \cdot \mathbf{A})$$

Mal by som sa zmieniť aj o tom, že tí najpedantnejší fyzici veličinu S vlastne ani nenazývajú účinkom. Nazývajú ju „prvou hlavnou Hamiltonovou funkciou“. Protiví sa mi prednášať o „princípe najmenšej prvej hlavnej Hamiltonovej funkcie“. Preto som ju nazval „účinkom“. Môžem vám však prezradiť, že je stále viac ľudí, ktorí ju tiež nazývajú účinkom. V histórii fyziky bolo síce účinkom nazvané niečo iné, lenže málo dôležité a preto si myslím, že bude rozumnejšie zmeniť túto definíciu. Teraz už aj vy budete veličinu S nazývať účinkom a nebude to trvať dlho, keď už všetci nazvú túto veličinu takým jednoduchým menom.

Teraz by som chcel k tejto téme povedať niečo podobné ako v prípade princípu najmenšieho času. Existuje rozdiel v samotnej podstate zákona, ktorý hovorí, že určitý integrál braný z jedného bodu do druhého má minimum (t.j. hovorí niečo o celej dráhe), a zákona, ktorý hovorí, že pri pohybe existuje sila spôsobujúca zrýchlenie. Ten druhý prístup hovorí o každom kroku na dráhe, zatiaľ čo ten prvý prístup poskytuje integrálne tvrdenie o celej dráhe. V prípade svetla sme hovorili o spojení týchto dvoch prístupov. Teraz by som vám chcel vysvetliť, prečo musia existovať diferenciálne zákony, ak platí princíp najmenšieho účinku. Príčina spočíva v nasledujúcom. Uvažujme skutočne prejdenu dráhu v priestore a čase. Tak ako predtým budeme uvažovať len jeden rozmer, a preto môžeme nakresliť graf závislosti x od t . Na skutočnej dráhe má S minimum. Predpokladajme, že máme takúto pravú dráhu, ktorá prechádza nejakým bodom a v priestore a čase, ako aj blízkym bodom b .



Ak celý integrál od t_1 do t_2 je minimálny, potom musí byť minimálnym aj integrál na krátkom úseku z a do b . Nemôže sa stať, že by integrál na úseku medzi a a b nebol minimálny. Ak by sa to totiž malo stať, stačilo by, aby ste vhodne pozmenili dráhu v tomto malom intervale, a tým by ste vlastne trochu zmenšili celý integrál.

Každá časť dráhy musí teda tiež predstavovať minimum. To musí platiť pre ľubovoľne malý úsek dráhy. Preto princíp hovoriaci, že celá dráha dáva minimum, možno formulovať aj tak, že infinitezimálny úsek dráhy tiež predstavuje krivku, na ktorej je účinok minimálny. Ak vyberieme dostatočne krátky úsek dráhy (medzi dvoma bodmi a a b , ktoré sú veľmi blízko), tak už nezáleží na tom, ako sa mení potenciál od bodu k vzdialenejšiemu bodu, lebo pri prechádzaní takou krátkou dráhou zostávate vlastne takmer na mieste. Jediné, čo musíte uvažovať, je zmena potenciálu, ktorá je prvého rádu malosti. Odpoveď môže závisieť len od derivácie potenciálu a nie od toho, aký je potenciál v iných miestach. Preto je vlastne tvrdenie o integrálnej vlastnosti celej dráhy tvrdením o tom, čo sa odohráva na maličkom úseku dráhy — je to teda diferenciálny výrok. A tento diferenciálny výrok zahrnuje iba derivácie potenciálu, čiže silu v danom bode. Také je kvalitatívne vysvetlenie súvislosti medzi integrálnym zákonom a diferenciálnym zákonom.

V prípade svetla sme si tiež položili otázku: „Ako nájde častica tú pravú dráhu?“ Z diferenciálneho hľadiska je ľahké pochopiť to. V každom okamihu získava zrýchlenie a vie iba to, čo má urobiť práve v tom okamihu.

Váš inštinkt pre príčinu a následok však bude ťažko znášať tvrdenie, že častica si vyberie tú dráhu, ktorá bude mať najmenší účinok. Snáď len nemá „čuch“ pre susedné dráhy, aby sa presvedčila, či dajú alebo nedajú väčší účinok. V prípade svetla, keď sme mu dávali do cesty prekážky, aby fotóny nemohli preskúmať všetky dráhy, sme zistili, že fotóny sa nemohli rozhodnúť, ktorou cestou ísť, a dostali sme jav difrakcie,

Platí to isté aj v mechanike? Je pravdou, že častica „nejde jednoducho pravou dráhou“, ale prehliada si všetky ostatné možné trajektórie? A dostaneme analóg difrakcie, ak jej postavíme prekážky a znemožníme jej to prehliadanie? Najdivnejšie na tom je práve to, že sa to skutočne deje. Tak hovoria zákony kvantovej mechaniky. Náš princíp najmenšieho účinku je teda neúplne formulovaný. Nespočíva v tom, že častica ide dráhou s najmenším účinkom, ale v tom, že „oňuchá“ všetky dráhy v susedstve a vyberá si tú, ktorá má najmenší účinok, a to podobným spôsobom, ako si svetlo vyberalo najkratší čas. Spomeňte si, akým spôsobom sa to dialo: Ak by išlo dráhou, ktorá si vyžaduje iný čas, došlo by s inou fázou. Celková amplitúda v nejakom bode je súčtom príspevkov od amplitúd všetkých rôznych ciest, ktorými svetlo môže do toho bodu prísť. Všetky tie dráhy, ktoré dávajú veľmi rozdielne fázy, nedajú po sčítaní nič. Ak by ste však mohli nájsť celú postupnosť dráh, ktoré majú takmer rovnaké fázy, malé príspevky by sa sčítali a dostali by ste značnú hodnotu celkovej amplitúdy pre príchod častice do daného bodu. Dôležitou dráhou sa stane tá, pre ktorú existuje mnoho susedných dráh dávajúcich tú istú fázu.

Práve to sa stáva v kvantovej mechanike. Úplná kvantová mechanika (nerelativistická a zanedbávajúca spin) pracuje takto: Pravdepodobnosť, že častica vychádzajúca z bodu 1 v čase t_1 dôjde do bodu 2 v čase t_2 , sa rovná druhej mocnine amplitúdy pravdepodobnosti. Celkovú amplitúdu možno vyjadriť ako súčet amplitúd všetkých možných dráh — pre každý spôsob príchodu. Pre každé $x(t)$, ktoré by sme mohli mať (pre každú mysliteľnú trajektóriu), musíme vypočítať amplitúdu. Potom ich všetky sčítame. Čo máme považovať za amplitúdu pravdepodobnosti nejakej dráhy? Náš účinkový integrál nám povie, aká má byť amplitúda jednotlivých dráh. Amplitúda je úmerná súčinu nejakej konštanty a výrazu $e^{iS/\hbar}$, kde S je účinok tej dráhy. Ak teda fázu amplitúdy vyjadríme v tvare komplexného čísla, bude fázový uhol $S/\hbar$. Účinok S má rozmer energie krát čas a Planckova konštanta $\hbar$ má ten istý rozmer. Je to konštanta, ktorá určuje, kedy je potrebná kvantová mechanika.

Nuž a takto to pracuje: Predpokladajme, že pre všetky dráhy je S veľmi veľké pri porovnaní s $\hbar$. Jedna dráha prispieva určitou amplitúdou. Fáza blízko položenej dráhy je celkom iná, lebo pre veľmi veľké S znamená aj malá zmena S úplne inú fázu — lebo $\hbar$ je také maličké. Pri sčítaní sa preto obyčajne zrušia príspevky blízko ležiacich dráh — okrem jedinej oblasti, a to tej, ktorej susedné dráhy dávajú v prvej aproximácii rovnaké fázy (presnejšie povedané rovnaký účinok v rozmedzí $\hbar$). Len tie dráhy budú dôležité. Potom v limitnom prípade, keď sa Planckova konštanta $\hbar$ blíži k nule, možno správne kvantovomechanické zákony zhrnúť do jednoduchého tvrdenia: „Zabudnite na všetky amplitúdy pravdepodobnosti. Častica sa bude pohybovať po špeciálnej dráhe — po takej, na ktorej sa v prvom priblížení nebude S meniť.“ Takto súvisí princíp najmenšieho účinku s kvantovou mechanikou. Skutočnosť, že kvantovú mechaniku možno formulovať takýmto spôsobom, objavil v roku 1942 študent toho učiteľa Badera, o ktorom som vám už hovoril. (Kvantová mechanika bola pôvodne formulovaná zadáním diferenciálnej rovnice pre amplitúdu (Schrödinger) a tiež pomocou istej maticovej matematiky (Heisenberg).)

Teaching Feynman's sum-over-paths quantum theory

Edwin F. Taylor,^{a)} Stamatis Vokos,^{b)} and John M. O'Meara^{c)}

Department of Physics, University of Washington, Seattle, Washington 98195-1560

Nora S. Thornber^{d)}

Department of Mathematics, Raritan Valley Community College, Somerville, New Jersey 08876-1265

(Received 30 July 1997; accepted 25 November 1997)

We outline an introduction to quantum mechanics based on the sum-over-paths method originated by Richard P. Feynman. Students use software with a graphics interface to model sums associated with multiple paths for photons and electrons, leading to the concepts of electron wavefunction, the propagator, bound states, and stationary states. Material in the first portion of this outline has been tried with an audience of high-school science teachers. These students were enthusiastic about the treatment, and we feel that it has promise for the education of physicists and other scientists, as well as for distribution to a wider audience. © 1998 American Institute of Physics. [S0894-1866(98)01602-2]

Thirty-one years ago, Dick Feynman told me about his "sum over histories" version of quantum mechanics. "The electron does anything it likes," he said. "It just goes in any direction at any speed, . . . however it likes, and then you add up the amplitudes and it gives you the wavefunction." I said to him, "You're crazy." But he wasn't.

--Freeman Dyson, 1980¹

INTRODUCTION

The electron is a free spirit. The electron knows nothing of the complicated postulates or partial differential equation of nonrelativistic quantum mechanics. Physicists have known for decades that the "wave theory" of quantum mechanics is neither simple nor fundamental. Out of the study of quantum electrodynamics (QED) comes Nature's simple, fundamental three-word command to the electron: "Explore all paths." The electron is so free-spirited that it refuses to choose which path to follow—so it tries them all. Nature's succinct command not only leads to the results of nonrelativistic quantum mechanics but also opens the door to exploration of elementary interactions embodied in QED.

Fifty years ago Richard Feynman² published the theory of quantum mechanics generally known as "the path integral method" or "the sum over histories method" or "the sum-over-paths method" (as we shall call it here). Thirty-three years ago Feynman wrote, with A. R. Hibbs,³ a more complete treatment in the form of a text suitable for study at the upper undergraduate and graduate level. Toward the end of his career Feynman developed an elegant, brief, yet completely honest, presentation in a popular book

written with Ralph Leighton.⁴ Feynman did *not* use his powerful sum-over-paths formulation in his own introductory text on quantum mechanics.⁵ The sum-over-paths method is sparsely represented in the physics-education literature⁶ and has not entered the mainstream of standard undergraduate textbooks.⁷ Why not? Probably because until recently the student could not track the electron's exploration of alternative paths without employing complex mathematics. The basic idea is indeed simple, but its use and application can be technically formidable. With current desktop computers, however, a student can command the modeled electron directly, pointing and clicking to select paths for it to explore. The computer then mimics Nature to sum the results for these alternative paths, in the process displaying the strangeness of the quantum world. This use of computers complements the mathematical approach used by Feynman and Hibbs and often provides a deeper sense of the phenomena involved.

This article describes for potential instructors the curriculum for a new course on quantum mechanics, built around a collection of software that implements Feynman's sum-over-paths formulation. The presentation begins with the first half of Feynman's popular QED book, which treats the addition of quantum arrows for alternative photon paths to analyze multiple reflections, single- and multiple-slit interference, refraction, and the operation of lenses, followed by introduction of the spacetime diagram and application of the sum-over-paths theory to electrons. Our course then leaves the treatment in Feynman's book to develop the non-relativistic wavefunction, the propagator, and bound states. In a later section of this article we report on the response of a small sample of students (mostly high-school science teachers) to the first portion of this approach (steps 1–11 in the outline), tried for three semesters in an Internet computer conference course based at Montana State University.⁸

^{a)}Now at the Center for Innovation in Learning, Carnegie Mellon University, 4800 Forbes Ave., Pittsburgh, PA 15213; E-mail: eftaylor@mit.edu

^{b)}vokos@phys.washington.edu

^{c)}joh3n@geophys.washington.edu

^{d)}nthornbe@rvcc.raritanval.edu

I. OUTLINE OF THE PRESENTATION

Below we describe the “logic line” of the presentation, which takes as the fundamental question of quantum mechanics: Given that a particle is located at x_a at time t_a , what is the probability that it will be located at x_b at a later time t_b ? We answer this question by tracking the rotating hand of an imaginary quantum stopwatch as the particle explores each possible path between the two events. The entire course can be thought of as an elaboration of the fruitful consequences of this single metaphor.

Almost every step in the following sequence is accompanied by draft software⁹ with which the student explores the logic of that step without using explicit mathematical formalism. Only some of the available software is illustrated in the figures. The effects of spin are not included in the present analysis.

A. The photon

Here are the steps in our presentation.

(1) Partial reflection of light: An everyday observation. In his popular book *QED, The Strange Theory of Light and Matter*, Feynman begins with the photon interpretation of an everyday observation regarding light: partial reflection of a stream of photons incident perpendicular to the surface of a sheet of glass. Approximately 4% of incident photons reflect from the front surface of the glass and another 4% from the back surface. For monochromatic light incident on optically flat and parallel glass surfaces, however, the net reflection from both surfaces taken together is typically not 8%. Instead, it varies from nearly 0% to 16%, depending on the thickness of the glass. Classical wave optics treats this as an interference effect.

(2) Partial reflection as sum over paths using quantum stopwatches. The results of partial reflection can also be correctly predicted by assuming that the photon explores all paths between emitter and detector, paths that include single and multiple reflections from each glass surface. The hand of an imaginary “quantum stopwatch” rotates as the photon explores each path.¹⁰ Into the concept of this imaginary stopwatch are compressed the fundamental strangeness and simplicity of quantum theory.

(3) Rotation rate for the hand of the photon quantum stopwatch. How fast does the hand of the imaginary photon quantum stopwatch rotate? Students recover all the results of standard wave optics by assuming that it rotates at the frequency of the corresponding classical wave.¹¹

(4) Predicting probability from the sum over paths. The resulting arrow at the detector is the vector sum of the final stopwatch hands for all alternative paths. The probability that the photon will be detected at a detector is proportional to the square of the length of the resulting arrow at that detector. This probability depends on the thickness of the glass.

(5) Using the computer to sum selected paths for the photon. Steps 1–4 embody the basic sum-over-paths formulation. Figure 1 shows the computer interface for a later task, in which the student selects paths in two space dimensions between an emitter and a detector. The student clicks with a mouse to place an intermediate point that determines one of the paths between source and detector. The computer then connects that point to source and detec-

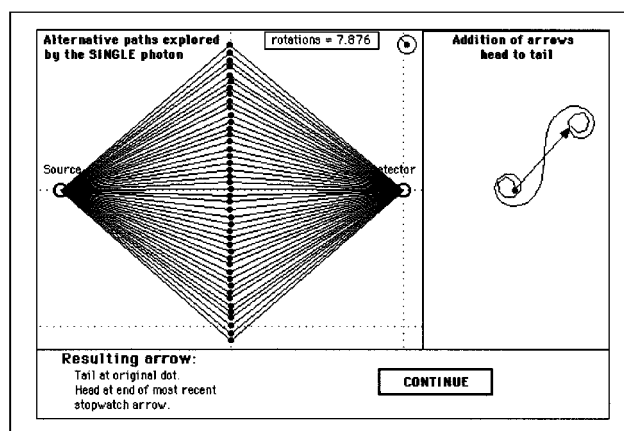


Figure 1. A single photon exploring alternative paths in two space dimensions. The student clicks to choose intermediate points between source and detector; the computer calculates the stopwatch rotation for each path and adds the little arrows head-to-tail to yield the resulting arrow at the detector, shown at the right.

tor, calculates rotation of the quantum stopwatch along the path, and adds the small arrow from each path (length shown in the upper right corner of the left-hand panel) head-to-tail to arrows from all other selected paths to yield the resulting arrow at the detector, shown at the right. The figure in the right-hand panel approximates the Cornu spiral. The resulting arrow is longer¹² than the initial arrow at the emitter and is rotated approximately 45° with respect to the arrow for the direct path. These properties of the Cornu spiral are important in the later normalization of the arrow that results from the sum over *all* paths between emitter and detector (step 16).

B. The electron

(6) Goal: Find the rotation rate for the hand of the electron quantum stopwatch. The similarity between electron interference and photon interference suggests that the behavior of the electron may also be correctly predicted by assuming that it explores all paths between emission and detection. (The remainder of this article will examine particle motion in only a single spatial dimension.) As before, exploration along each path is accompanied by the rotating hand of an imaginary stopwatch. How rapidly does the hand of the quantum stopwatch rotate for the *electron*? In this case there is no obvious classical analog. Instead, we prepare to answer the question by summarizing the classical mechanics of a single particle using the principle of least action (Fig. 2).

(7) The classical principle of least action. Feynman gives his own unique treatment of the classical principle of least action in his book, *The Feynman Lectures on Physics*.¹³ A particle in a potential follows the path of least action (strictly speaking, extremal action) between the events of launch and arrival. Action is defined as the time integral of the quantity $(KE - PE)$ along the path of the particle, namely,

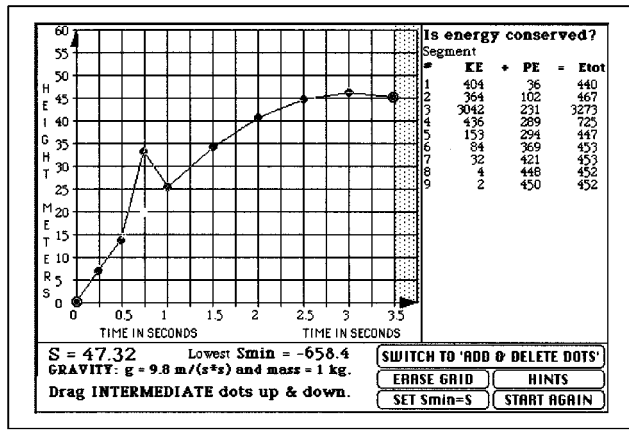


Figure 2. Computer display illustrating the classical principle of least action for a 1-kg stone launched vertically near the Earth's surface. A trial worldline of the stone is shown on a spacetime diagram with the time axis horizontal (as Feynman draws it in his introduction to action in Ref. 13). The student chooses points on the worldline and drags these points up and down to find the minimum for the value of the action S , calculated by the computer and displayed at the bottom of the screen. The table of numbers on the right verifies (approximately) that energy is conserved for the minimum-action worldline but is not conserved for segments 3 and 4, which deviate from the minimum-action worldline.

$$\text{action} = S \equiv \int_{\text{along the worldline}} (KE - PE) dt. \quad (1)$$

Here KE and PE are the kinetic and potential energies of the particle, respectively. See Fig. 2.

This step introduces the spacetime diagram (a plot of the position of the stone as a function of time). Emission and detection now become *events*, located in both space and time on the spacetime diagram, and the idea of *path* generalizes to that of the *worldline* that traces out on the spacetime diagram the motion of the stone between these endpoints. The expression for action is the first equation required in the course.

(8) From the action comes the rotation rate of the electron stopwatch. According to quantum theory,¹⁴ the number of rotations that the quantum stopwatch makes as the particle explores a given path is equal to the action S along that path divided by Planck's constant h .¹⁵ This fundamental (and underived) postulate tells us that the frequency f with which the electron stopwatch rotates as it explores each path is given by the expression¹⁶

$$f = \frac{KE - PE}{h}. \quad (2)$$

(9) Seamless transition between quantum and classical mechanics. In the absence of a potential (Figs. 3 and 4), the major contributions to the resulting arrow at the detector come from those worldlines along which the number of rotations differs by one-half rotation or less from that of the classical path, the direct worldline (Fig. 5). Arrows from all other paths differ greatly from one another in direction and tend to cancel out. The greater the particle mass, the more rapidly the quantum clock rotates [for a given speed in Eq. (2)] and the nearer to the classical path

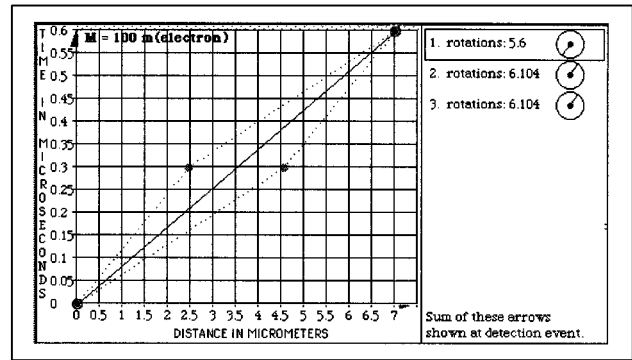


Figure 3. Illustrating the "fuzziness" of worldlines around the classical path for a hypothetical particle of mass 100 times that of the electron moving in a region of zero potential. Worldlines are drawn on a spacetime diagram with the time axis vertical (the conventional choice). The particle is initially located at the event dot at the lower left and has a probability of being located later at the event dot in the upper right. The three worldlines shown span a pencil-shaped bundle of worldlines along which the stopwatch rotations differ by half a revolution or less from that of the straight-line classical path. This pencil of worldlines makes the major contribution to the resulting arrow at the detector (Fig. 5).

are those worldlines that contribute significantly to the final arrow. In the limit of large mass, the only noncanceling path is the single classical path of least action. Figures 3, 4, and 5 illustrate the seamless transition between quantum mechanics and classical mechanics in the sum-over-paths approach.

C. The wavefunction

(10) Generalizing beyond emission and detection at single events. Thus far we have described an electron emitted from a single initial event; we sample alternative paths to construct a resulting arrow at a later event. But this later event can be in one of several locations at a given later time, and we can construct a resulting arrow for each of these later events. This set of arrows appears along a single horizontal "line of simultaneity" in a spacetime diagram,

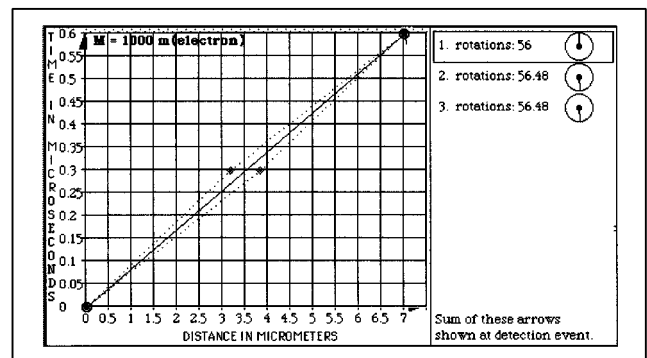


Figure 4. Reduced "fuzziness" of the pencil of worldlines around the classical path for a particle of mass 1000 times that of the electron (10 times the mass of the particle whose motion is pictured in Fig. 3). Both this and Fig. 3 illustrate the seamless transition between quantum and classical mechanics provided by the sum-over-paths formulation.

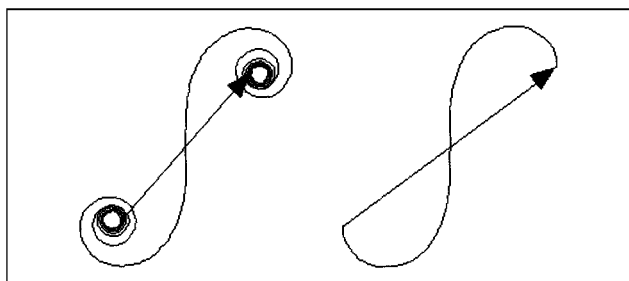


Figure 5. Addition of arrows for alternative paths, as begun in Fig. 1. The resulting arrow for a (nearly) complete Cornu spiral (left) is approximated (right) by contributions from only those worldlines along which the number of rotations differs by one-half rotation or less from that of the direct worldline. This approximation is used in Figs. 3 and 4 and in our later normalization process (step 16 below).

as shown in Fig. 6. In Fig. 6 the emission event is at the lower left and a finite packet is formed by selecting a short sequence of the arrows along the line of simultaneity at time 5.5 units. A later row of arrows (shown at time 11.6 units) can be constructed from the earlier set of arrows by the usual method of summing the final stopwatch arrows along paths connecting each point on the wavefunction at the earlier time to each point on the wavefunction at the later time. In carrying out this propagation from the earlier to the later row of dots, details of the original single emission event (in the lower left of Fig. 6) need no longer be known.

In Figs. 6 and 7 the computer calculates and draws each arrow in the upper row (time near 12 units in both

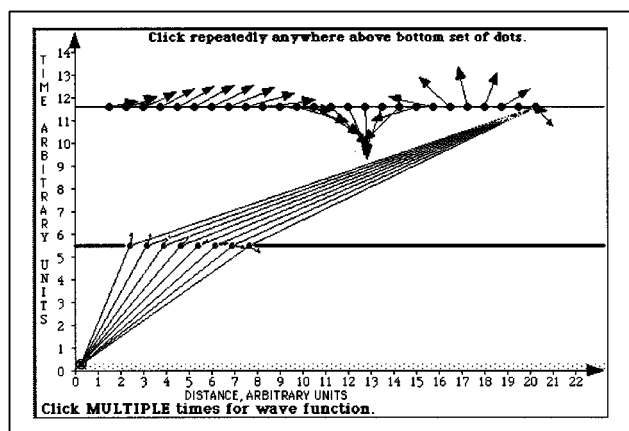


Figure 6. The concept of “wavefunction” arises from the application of the sum-over-paths formulation to a particle at two sequential times. The student clicks at the lower left to create the emission event, clicks to select the endpoints of an intermediate finite packet of arrows, then clicks once above these to choose a later time. The computer samples worldlines from the emission (whose initial stopwatch arrow is assumed to be vertical) through the intermediate packet, constructing a later series of arrows at possible detection events along the upper line. We call this series of arrows at a given time the “wavefunction.” This final wavefunction can be derived from the arrows in the intermediate packet, without considering the original emission (Ref. 17).

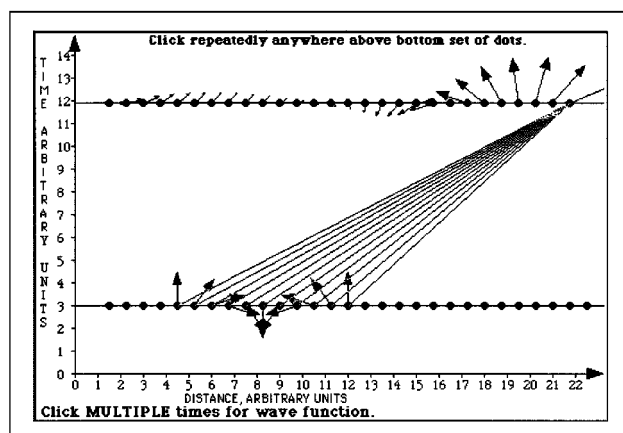


Figure 7. An extended arbitrary initial wavefunction now has a life of its own, with the sum-over-paths formulation telling it how to propagate forward in time. Here a packet moves to the right.

figures) by simple vector addition of every arrow propagated/rotated from the lower row (time 5.5 units in Fig. 6, time 3 units in Fig. 7). Each such propagation/rotation takes place only along the SINGLE direct worldline between the initial point and the detection point—NOT along ALL worldlines between each lower and each upper event, as required by the sum-over-paths formulation. Typically students do not notice this simplification. Steps 12–16 repair this omission, but to look ahead we remark that for a free particle the simpler (and incomplete) formulation illustrated in Fig. 7 still approximates the correct *relative probabilities* of finding the particle at different places at the later time.

(11) The wavefunction as a discrete set of arrows.

We give the name (nonrelativistic) *wavefunction* to the collection of arrows that represent the electron at various points in space at a given time. In analogy to the intensity in wave optics, the probability of finding the electron at a given time and place is proportional to the squared magnitude of the arrow at that time and place. We can now investigate the propagation forward in time of an arbitrary initial wavefunction (Fig. 7). The sum-over-paths procedure uses the initial wavefunction to predict the wavefunction at a later time.

Representing a continuous wavefunction with a finite series of equally spaced arrows can lead to computational errors, most of which are avoidable or can be made insignificant for pedagogic purposes.¹⁸

The process of *sampling* alternative paths (steps 1–11 and their elaboration) has revealed essential features of quantum mechanics and provides a self-contained, largely nonmathematical introduction to the subject for those who do not need to use quantum mechanics professionally. This has been tried with students, with the results described later in this article. The following steps are the result of a year’s thought about how to extend the approach to include correctly ALL paths between emission and detection.

D. The propagator

(12) **Goal: Sum ALL paths using the “propagator.”** Thus far we have been *sampling* alternative paths

between emitter and detector. Figures 1, 3, and 4 imply the use of only a few alternative paths between a single emission event and a single detection event. Each arrow in the final wavefunction of Fig. 7 sums the contributions along just a *single* straight worldline from each arrow in the initial wavefunction. But Nature tells the electron (in the corrected form of our command): *Explore ALL worldlines*. To draw Fig. 7 correctly we need to take into account propagation along ALL worldlines—including those that zigzag back and forth in space—between every initial dot on the earlier wavefunction and each final dot on the later wavefunction. If Nature is good to us, there will be a simple function that summarizes the all-paths result. This function accepts as input the arrow at a single initial dot on the earlier wavefunction and delivers as output the corresponding arrow at a single dot on the later wavefunction due to propagation via ALL intermediate worldlines. If it exists, this function answers the fundamental question of quantum mechanics: Given that a particle is located at x_a at time t_a , what is the probability (derived from the squared magnitude of the resulting arrow) that it will be located at x_b at a later time t_b ? It turns out that Nature is indeed good to us; such a function exists. The modern name for this function is the “propagator,” the name we adopt here because the function tells how a quantum arrow *propagates* from one event to a later event. The function is sometimes called the “transition function”; Feynman and Hibbs call it the “kernel,” leading to the symbol K in the word equation

$$\left(\begin{array}{c} \text{arrow at} \\ \text{later event } b \end{array} \right) = K(b,a) \left(\begin{array}{c} \text{arrow at} \\ \text{earlier event } a \end{array} \right). \quad (3)$$

The propagator $K(b,a)$ in Eq. (3) changes the magnitude and direction of the initial arrow at event a to create the later arrow at event b via propagation along ALL worldlines. This contrasts with the method used to draw Fig. 7, in which each contribution to a resulting upper arrow is constructed by rotating an arrow from the initial wavefunction along the SINGLE direct worldline only. In what follows, we derive the propagator by correcting the inadequacies in the construction of Fig. 7, but for a simpler initial wavefunction.

(13) Demand that a uniform wavefunction stay uniform. We derive the free-particle propagator heuristically by demanding that an initial wavefunction uniform in space propagate forward in time without change.¹⁹ The initial wavefunction, the central portion of which is shown at the bottom of Fig. 8, is composed of vertical arrows of equal length. The equality of the squared magnitudes of these arrows implies an initial probability distribution uniform in x . Because of the very wide extent of this initial wavefunction along the x direction, we expect that any diffusion of probability will leave local probability near the center constant for a long time. This analysis does not tell us that the arrows will also stay vertical with time, but we postulate this result as well.²⁰ The student applies a trial propagator function between every dot in the initial wavefunction and every dot in the final wavefunction, modifying the propagator until the wavefunction does not change with time, as shown in Fig. 10.

(14) Errors introduced by sampling paths. In Fig. 8, we turn the computer loose, asking it to construct single

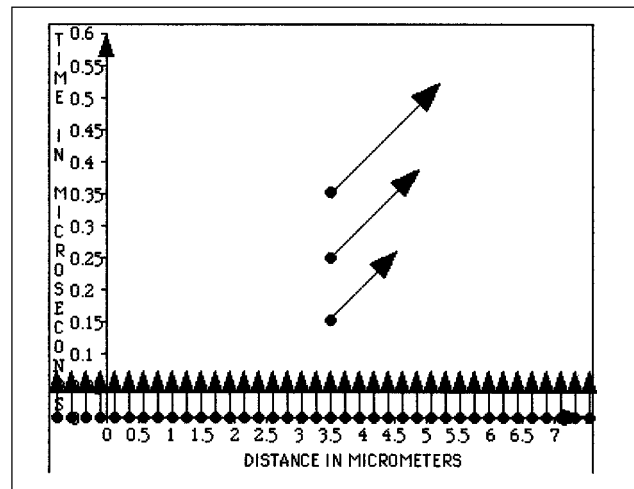


Figure 8. Resulting arrows at different times, derived naively from an initial wavefunction that is uniform in profile and very wide along the x axis (extending in both directions beyond the segment shown as parallel arrows at the bottom of the screen). The resulting arrows at three later times, shown at one-fifth of their actual lengths, are each calculated by rotating every initial arrow along the single direct worldline connecting it with the detection event and summing the results. The resulting arrows are (1) too long, (2) point in the wrong direction, and (3) incorrectly increase in length with time.

arrows at three later times from an initially uniform wavefunction shown along the bottom. The computer derives each later arrow incorrectly by propagating/rotating the contribution from each lower arrow along a SINGLE direct worldline, then summing the results from all these direct worldlines, as it did in constructing Fig. 7. The resulting arrows at three later times are shown in Fig. 8 at one-fifth their actual lengths. These lengths are much too great to represent a wavefunction that does not change with time. This is the first lack shown by these resulting arrows. The second is that they do not point upward as required. The reason for this net rotation can be found in the Cornu spiral (Fig. 5), which predicts the *same net* rotation for all later times. The third deficiency is that the resulting arrows increase in length with time. All of these deficiencies spring from the failure of the computer program to properly sum the results over ALL paths (all worldlines) between each initial arrow and the final arrow. We will now correct these insufficiencies to construct the free-particle propagator.

(15) Predicting the properties of the propagator. From a packaged list, the student chooses (and may modify) a trial propagator function. The computer then applies it to EACH arrow in the initial wavefunction of Fig. 8 as this arrow influences the resulting arrow at the single detection event later in time, then sums the results for all initial arrows. What can we predict about the *properties* of this propagator function?

- By trial and error, the student will find that the propagator must include an initial angle of *minus* 45° in order to cancel the rotation of the resultant arrow shown in Fig. 8.
- We assume that the rotation rate in space and time for

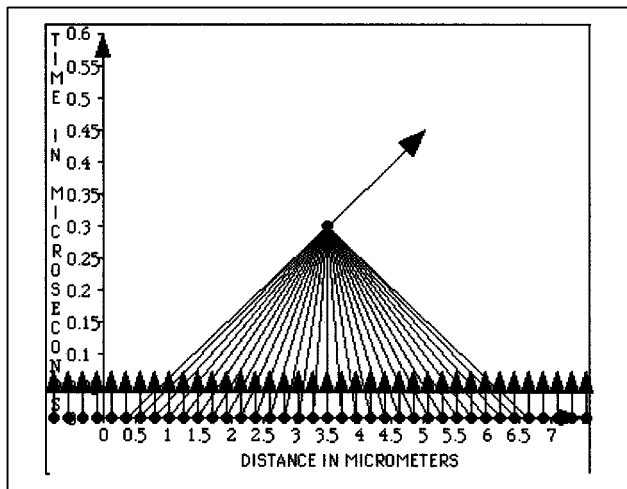


Figure 9. Similar to Fig. 8. Here the “pyramid” indicates those direct worldlines from the initial wavefunction to the detection event for which the number of rotations of the quantum stopwatch differs by one-half revolution or less compared with that of the shortest (vertical) worldline. (The central vertical worldline implies zero rotation.)

the trial free-particle propagator is given by frequency Eq. (2) with PE equal to zero, applied along the direct worldline.

- (c) The propagator must have a magnitude that decreases with time to counteract the time increase in magnitude displayed in Fig. 8.

(16) Predicting the magnitude of the propagator.

The following argument leads to a trial value for the magnitude of the propagator: Figs. 3–5 suggest that most of the contributions to the arrow at the detector come from worldlines along which the quantum stopwatch rotation differs by half a revolution or less from that of the direct worldline. A similar argument leads us to assume that the major influence that the initial wavefunction has at the detection event results from those initial arrows, each of which executes one-half rotation or less along the direct worldline to the detection event. The “pyramid” in Fig. 9 displays those worldlines that satisfy this criterion. [The vertical worldline to the apex of this pyramid corresponds to zero particle velocity, so zero kinetic energy, and therefore zero net rotation according to Eq. (2).]

Let X be the half-width of the base of the pyramid shown in Fig. 9, and let T be the time between the initial wavefunction and the detection event. Then Eq. (2) yields an expression that relates these quantities to the assumed one-half rotation of the stopwatch along the pyramid’s slanting right-hand worldline, namely,

$$\begin{aligned} \text{number of rotations} &= \frac{1}{2} = \frac{KE}{h} T = \frac{mv^2}{2h} T = \frac{mX^2}{2hT^2} T \\ &= \frac{mX^2}{2hT}. \end{aligned} \quad (4)$$

Solving for $2X$, we find the width of the pyramid base in Fig. 9 to be

$$2X = 2 \left(\frac{hT}{m} \right)^{1/2}. \quad (5)$$

The arrows in the initial wavefunction that contribute significantly to the resulting arrow at the detection event lie along the base of this pyramid. The number of these arrows is proportional to the width of this base. To correct the magnitude of the resulting arrow, then, we divide by this width and insert a constant of proportionality B . The constant B allows for the arbitrary spacing of the initial arrows (spacing chosen by the student) and provides a correction to our rough estimate. The resulting normalization constant for the magnitude of the resulting arrow at the detector is

$$\left(\begin{array}{c} \text{normalization} \\ \text{constant for} \\ \text{magnitude of} \\ \text{resulting arrow} \end{array} \right) = B \left(\frac{m}{hT} \right)^{1/2}. \quad (6)$$

The square-root expression on the right-side of Eq. (6) has the units of inverse length. In applying the normalization, we multiply it by the spatial separation between adjacent arrows in the wavefunction.

The student determines the value of the dimensionless constant B by trial and error, as described in the following step.

(17) Heuristic derivation of the free-particle propagator. Using an interactive computer program, the student tries a propagator that gives each initial arrow a twist of -45° , then rotates it along the direct worldline at a rate computed using Eq. (2) with $PE = 0$. The computer applies this trial propagator for the time T to EVERY spatial separation between EACH arrow in the initial wavefunction and the desired detection event, summing these contributions to yield a resulting arrow at the detection event. The computer multiplies the magnitude of the resulting arrow at the detector by the normalization constant given in Eq. (6). The student then checks that for a uniform initial wavefunction the resulting arrow points in the same direction as the initial arrows. Next the student varies the value of the constant B in Eq. (6) until the resulting arrow has the same length as each initial arrow,²¹ thereby discovering that $B = 1$. (Nature is very good to us.) The student continues to use the computer to verify this procedure for different time intervals T and different particle masses m , and to construct wavefunctions (many detection events) at several later times from the initial wavefunction (Fig. 10).

(18) Mathematical form of the propagator. The summation carried out between all the arrows in the initial wavefunction and each single detection event approximates the integral in which the propagator function K is usually employed²² for a continuous wavefunction,

$$\psi(x_b, t_b) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(b, a) \psi(x_a, t_a) dx_a. \quad (7)$$

Here the label a refers to a point in the initial wavefunction, while the label b applies to a point on a later wavefunction. The free-particle propagator K is usually written²³

$$K(b, a) = \left(\frac{m}{ih(t_b - t_a)} \right)^{1/2} \exp \frac{im(x_b - x_a)^2}{2\hbar(t_b - t_a)}, \quad (8)$$

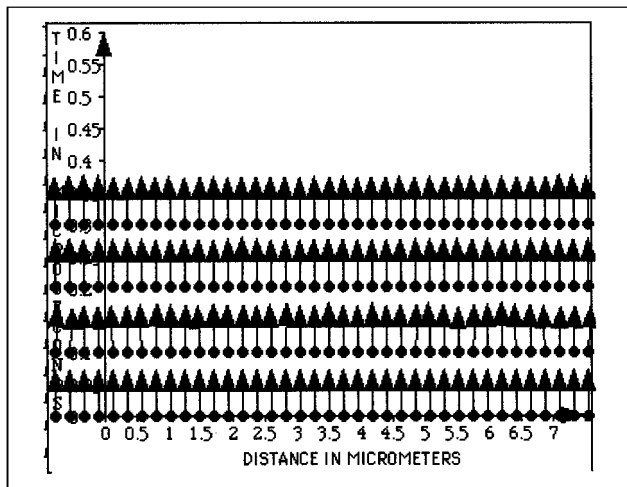


Figure 10. Propagation of an initially uniform wavefunction of very wide spatial extent (a portion shown in the bottom row of arrows) forward to various later times (upper three rows of arrows), using the correct free-particle propagator to calculate the arrow at each later point from all of the arrows in the initial wavefunction. The student chooses the wavefunction in the bottom row, then clicks once above the bottom row for each later time. The computer then uses the propagator to construct the new wavefunction.

where the conventional direction of rotation is counter-clockwise, zero angle being at a rightward orientation of the arrow. Notice the difference between h in the normalization constant and $\hbar$ in the exponent. The square-root coefficient on the right side of this equation embodies not only the normalization constant of Eq. (6) but also the initial twist of -45° , expressed in the quantity $i^{-1/2}$. This coefficient is not a function of x , so it "passes through" the integral of Eq. (7) and can be thought of as normalizing the summation as a whole. Students may or may not be given Eqs. (7) and (8) at the discretion of the instructor. The physical content has been made explicit anyway, and the computer will now generate consequences as the student directs.

E. Propagation in time of a nonuniform wavefunction

(19) Time development of the wavefunction. With a verified free-particle propagator, the student can now predict the time development of *any* initial one-dimensional free-particle wavefunction by having the computer apply this propagator to all arrows in the initial wavefunction to create each arrow in the wavefunction at later times. Figure 11 shows an example of such a change with time.

(20) Moving toward the Schrödinger equation. Students can be encouraged to notice that an initial wavefunction very wide in extent with a ramp profile (constant slope, i.e., constant first x derivative) propagates forward in time without change. We can then challenge the student to construct for a free particle an initial wavefunction of *finite* extent in the x direction that does not change with time. Attempting this impossible task is instructive. Why is the task impossible? Because the profile of an initial wavefunction finite in extent necessarily includes *changes* in slope,

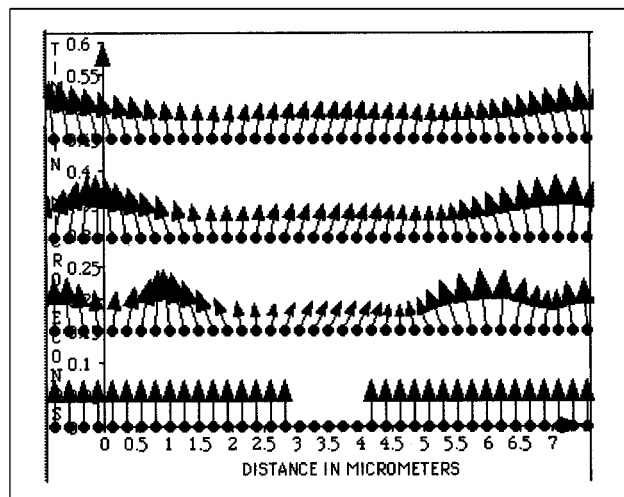


Figure 11. Time propagation of an initial wavefunction with a "hole" in it, using the verified free-particle propagator. The student chooses the initial wavefunction and clicks once for each later time. The computer then uses the correct free-particle propagator to propagate the initial wavefunction forward to this later time, showing that the "hole" spreads outward.

that is, a second x derivative. The stage is now set for development of the Schrödinger equation, which relates the time derivative of a free-particle wavefunction to its second space derivative. We do not pursue this development in the present article.²⁴

F. Wavefunction in a potential

(21) Time development in the presence of a potential. Equation (2) describes the rotation rate of the quantum stopwatch when a potential is present. A constant potential uniform in space simply changes everywhere the rotation rate of the quantum clock hand, as the student can verify from the display. Expressions for propagators in various potentials, such as the infinitely deep square well and the simple harmonic oscillator potential, have been derived by specialists.²⁵ It is too much to ask students to search out these more complicated propagators by trial and error. Instead, such propagators are simply built into the computer program and the student uses them to explore the consequences for the time development of the wavefunction.

G. Bound states and stationary states

(22) Bound states. Once the propagator for a one-dimensional binding potential has been programmed into the computer, the student can investigate how *any* wavefunction develops with time in that potential. Typically, the probability peaks slosh back and forth with time. Now we can again challenge the student to find wavefunctions that do not change with time (aside from a possible overall rotation). One or two examples provided for a given potential prove the existence of these *stationary states*, challenging the student to construct others for the same potential. The student will discover that for each stationary state all arrows of the wavefunction rotate in unison, and that the

more probability peaks the stationary-state wavefunction has, the more rapid is this unison rotation. This leads to discrete energies as a characteristic of stationary states.

Spin must be added as a separate consideration in this treatment, as it must in all conventional introductions to nonrelativistic quantum mechanics.

II. EARLY TRIALS AND STUDENT RESPONSE

For three semesters, fall and spring of the academic year 1995–96 and fall of 1996, Feynman's popular QED book was the basis of an online-computer-conference college course called "Demystifying Quantum Mechanics," taken by small groups of mostly high-school science teachers. The course covered steps 1–11 that were described earlier. The computer-conference format is described elsewhere.²⁶

Students used early draft software to interact with Feynman's sum-over-paths model to enrich their class discussions and to solve homework exercises.

Because the computer displays and analyzes paths explored by the particle, no equations are required for the first third of the semester. Yet, from the very first week, discussions showed students to be deeply engaged in fundamental questions about quantum mechanics. Moreover, the software made students accountable in detail: exercises could be completed only by properly using the software.

How did students respond to the sum-over-paths formulation? Listen to comments of students enrolled in the fall 1995 course. (Three periods separate comments by different students.)

"The reading was incredible . . . I really get a kick out of Feynman's totally off-wall way of describing this stuff . . . Truly a ground-breaker! . . . He brings up some REALLY interesting ideas that I am excited to discuss with the rest of the class . . . I'm learning twice as much as I ever hoped to, and we have just scratched the surface . . . It's all so profound. I find myself understanding 'physics' at a more fundamental level . . . I enjoy reading him because he seems so honest about what he (and everyone else) does not know . . . Man, it made me feel good to read that Feynman couldn't understand this stuff either . . . it occurs to me that the reading is easy because of the software simulations we have run . . . the software plays a very strong role in helping us understand the points being made by Feynman."

During the spring 1996 semester, a student remarked in a postscript:

"PS—Kudos for this course. I got an A in my intro qm class without having even a fraction of the understanding I have now . . . This all makes so much more sense now, and I owe a large part of that to the software. I never [had] such compelling and elucidating simulations in my former course. Thanks again!!!"

At the end of the spring 1996 class, participants completed an evaluative questionnaire. There were no substantial negative comments.²⁷ Feynman's treatment and the software were almost equally popular:

Q5. I found Feynman's approach to quantum mechanics to be

boring/irritating 1 2 3 4 5 fascinating/
stimulating

student choices: 0 0 0 2 11 (average: 4.85).

Q18. For my understanding of the material, the software was

not important 1 2 3 4 5 very important

student choices: 0 0 1 1 11 (average: 4.77).

Student enthusiasm encourages us to continue the development of this approach to quantum mechanics. We recognize, of course, that student enthusiasm may be gratifying, but it does not tell us in any detail what they have learned. We have not tested comprehensively what students understand after using this draft material, or what new misconceptions it may have introduced into their mental picture of quantum mechanics. Indeed, we will not have a basis for setting criteria for testing student mastery of the subject until our "story line" and accompanying software are further developed.²⁸

III. ADVANTAGES AND DISADVANTAGES OF THE SUM-OVER-PATHS FORMULATION

The advantages of introducing quantum mechanics using the sum-over-paths formulation include the following.

- (i) The basic idea is simple, easy to visualize, and quickly executed by computer.
- (ii) The sum-over-paths formulation begins with a free particle moving from place to place, a natural extension of motions studied in classical mechanics.
- (iii) The process of *sampling* alternative paths (steps 1–11 and their elaboration) reveals essential features of quantum mechanics and can provide a self-contained, largely nonmathematical introduction to the subject for those who do not need to use quantum mechanics professionally.
- (iv) Summing *all* paths with the propagator permits numerically accurate results of free-particle motion and bound states (steps 12–22).
- (v) One can move seamlessly back and forth between classical and quantum mechanics (see Figs. 3 and 4).
- (vi) Paradoxically, although little mathematical formalism is required to introduce the sum-over-paths formulation, it leads naturally to important mathematical tools used in more advanced physics. "Feynman diagrams," part of an upper undergraduate or graduate course, can be thought of as extensions of the meaning of "paths."²⁹ The propagator is actually an example of a Green's function, useful throughout theoretical physics, as are variational methods³⁰ including the method of stationary phase. When formalism is introduced later, the propagator in Dirac notation has a simple form:

$$K(b, a) = \langle x_b, t_b | x_a, t_a \rangle.$$

The major disadvantages of introducing quantum mechanics using the sum-over-paths formulation include the following.

- (i) It is awkward in analyzing bound states in arbitrary potentials. Propagators in analytic form have been worked out for only simple one-dimensional binding potentials.
- (ii) Many instructors are not acquainted with teaching the sum-over-paths formulation, so they will need to expend more time and effort in adopting it.
- (iii) It requires more time to reach analysis of bound states.

IV. SOME CONCLUSIONS FOR TEACHING QUANTUM MECHANICS

The sum-over-paths formulation (steps 1–11) allows physicists to present quantum mechanics to the entire intellectual community at a fundamental level with minimum manipulation of equations.

The enthusiasm of high-school science teachers participating in the computer conference courses tells us that the material is motivating for those who have already had contact with basic notions of quantum mechanics.

The full sum-over-paths formulation (steps 1–22) does not fit conveniently into the present introductory treatments of quantum mechanics for the physics major. It constitutes a long introduction before derivation of the Schrödinger equation. We consider this incompatibility to be a major advantage; the attractiveness of the sum-over-paths formulation should force reexamination of the entire introductory quantum sequence.

ACKNOWLEDGMENTS

Portions of this article were adapted from earlier writing in collaboration with Paul Horwitz, who has also given much advice on the approach and on the software. Philip Morrison encouraged the project. Lowell Brown and Ken Johnson have given advice and helped guard against errors in the treatment (not always successfully!). A. P. French, David Griffiths, Jon Ogborn, and Daniel Styer offered useful critiques of the article. Detailed comments on an earlier draft were provided also by Larry Sorensen and by students in his class at the University of Washington: Kelly Barry, Jeffery Broderick, David Cameron, Matthew Carson, Christopher Cross, David DeBruyne, James Enright, Robert Jaeger, Kerry Kimes, Shaun Leach, Mark Mendez, and Dev Sen. One of the authors (E.F.T.) would like to thank the members of the Physics Education Group for their hospitality during the academic year 1996–97. In addition, the authors would like to thank Lillian C. McDermott and the other members of the Physics Education Group, especially Bradley S. Ambrose, Paula R. L. Heron, Chris Kautz, Rachel E. Scherr, and Peter S. Shaffer for providing them with valuable feedback. The article was significantly improved following suggestions from David M. Cook, an Associate Editor of this journal. This work was supported in part by NSF Grant No. DUE-9354501, which includes support from the Division of Undergraduate Education, other Divisions of EHR, and the Physics Division of MPS.

REFERENCES

1. F. Dyson, in *Some Strangeness in the Proportion*, edited by H. Woolf (Addison-Wesley, Reading, MA, 1980), p. 376.
2. R. P. Feynman, *Rev. Mod. Phys.* **20**, 367 (1948).
3. R. P. Feynman and A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals* (McGraw-Hill, New York, 1965).
4. R. P. Feynman, *QED, The Strange Theory of Light and Matter* (Princeton University Press, Princeton, 1985).
5. R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics* (Addison-Wesley, Reading, MA, 1964), Vol. III.
6. See, for example, N. J. Dowrick, *Eur. J. Phys.* **18**, 75 (1997). Titles of articles on this subject in the *Am. J. Phys.* may be retrieved online at <http://www.amherst.edu/~ajp>.
7. R. Shankar, *Principles of Quantum Mechanics*, 2nd ed. (Plenum, New York, 1994). This text includes a nice introduction of the sum-over-paths theory and many applications, suitable for an upper undergraduate or graduate course.
8. For a description of the National Teachers Enhancement Network at Montana State University and a listing of current courses, see the Web site <http://www.montana.edu/wwwxs>.
9. Draft software written by Taylor in the computer language cT. For a description of this language, see the Web site <http://cil.andrew.cum.edu/ct.html>.
10. To conform to the “stopwatch” picture, rotation is taken to be clockwise, starting with the stopwatch hand straight up. We assume that later [for example, with Eq. (8) in step 18] this convention will be “professionalized” to the standard counterclockwise rotation, starting with initial orientation in the rightward direction. The choice of either convention, consistently applied, has no effect on probabilities calculated using the theory.
11. Feynman explains later in his popular QED book (page 104 of Ref. 4) that the photon stopwatch hand does not rotate while the photon is in transit. Rather, the little arrows summed at the detection event arise from a series of worldlines originating from a “rotating” source.
12. In Fig. 1, the computer simply adds up stopwatch-hand arrows for a sampling of alternative paths in two spatial dimensions. The resulting arrow at the detector is longer than the original arrow at the emitter. Yet the probability of detection (proportional to the square of the length of the arrow at the detector) cannot be greater than unity. Students do not seem to worry about this at the present stage in the argument.
13. R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics* (Addison-Wesley, Reading, MA, 1964), Vol. II, Chap. 19.
14. See, Ref. 2, Sec. 4, postulate II.
15. The classical principle of least action assumes fixed initial and final events. This is exactly what the sum-over-paths formulation of quantum mechanics needs also, with fixed events of emission and detection. The classical principle of least action is valid only when dissipative forces (such as friction) are absent. This condition is also satisfied by quantum mechanics, since there are no dissipative forces at the atomic level.
16. A naive reading of Eq. (2) seems to be inconsistent with the deBroglie relation when one makes the substitutions $f = v/\lambda = p/(m\lambda)$ and $KE = p^2/(2m)$ and $PE = 0$. In Ref. 3, pp. 44–45, Feynman and Hibbs resolve this apparent inconsistency, which reflects the difference between group velocity and phase velocity of a wave.
17. See a similar figure in Ref. 3, Fig. 3-3, p. 48.
18. We have found three kinds of errors that result from representing a continuous wavefunction with a finite series of equally spaced arrows. (1) Representing a wavefunction of wide x extension with a narrower width of arrows along the x direction leads to propagation of edge effects into the body of the wavefunction. The region near the center changes a negligible amount if the elapsed time is sufficiently short. (2) The use of discrete arrows can result in a Cornu spiral that does not complete its inward scroll to the theoretically predicted point at each end. For example, in the Cornu spiral in the left-hand panel of Fig. 5, the use of discrete arrows leads to repeating small circles at each end, rather than convergence to a point. The overall resulting arrow (from the tail of the first little arrow to the head of the final arrow) can differ slightly in length from the length it would have if the scrolls at both ends wound to their centers. The fractional error is typically reduced by increasing the number of arrows, thereby increasing the ratio of resulting arrow length to the length of the little

- component arrows. (3) The formation of a smooth Cornu spiral at the detection event requires that the *difference* in rotation to a point on the final wavefunction be small between arrows that are adjacent in the original wavefunction. But for very short times between the initial and later wavefunctions, some of the connecting worldlines are nearly horizontal in spacetime diagrams similar to Figs. 3 and 4, corresponding to large values of kinetic energy KE , and therefore high rotation frequency $f = KE/h$. Under such circumstances, the *difference* in rotation at an event on the final wavefunction can be great between arrows from adjacent points in the initial wavefunction. This may lead to distortion of the Cornu spiral or even its destruction. In summary, a finite series of equally spaced arrows can adequately represent a continuous wavefunction provided the number of arrows (for a given total x extension) is large and the time after the initial wavefunction is neither too small nor too great. We have done a preliminary quantitative analysis of these effects showing that errors can be less than 2% for a total number of arrows easily handled by desktop computers. This accuracy is adequate for teaching purposes.
19. In Ref. 3, p. 42ff, Feynman and Hibbs carry out a complicated integration to find the propagator for a free electron. However, the normalization constant used in their integration is determined only later in their treatment (Ref. 3, p. 78) in the course of deriving the Schrödinger equation.
 20. This is verified by the usual Schrödinger analysis. The initial free-particle wavefunction shown in Figs. 8–10 has zero second x derivative, so it will also have a zero time derivative.
 21. We add a linear taper to each end of the initial wavefunctions used in constructing Figs. 8–11 to suppress “high-frequency components” that otherwise appear along the entire length of a later wavefunction when a finite initial wavefunction has a sharp space termination. The tapered portions lie outside the views shown in these figures.
 22. In Ref. 3, Eq. (3-42), p. 57.
 23. In Ref. 3, Eq. (3-3), p. 42.
 24. In Refs. 2 and 3; see also D. Derbes, Am. J. Phys. **64**, 881 (1996).
 25. In Ref. 3; L. S. Schulman, *Techniques and Applications of Path Integration* (Wiley, New York, 1981).
 26. R. C. Smith and E. F. Taylor, Am. J. Phys. **63**, 1090 (1995).
 27. A complete tabulation of the spring 1996 questionnaire results is available from Taylor.
 28. To obtain draft exercises and software, see the Web site <http://cil.andrew.cmu.edu/people/edwin.taylor.html>.
 29. Feynman implies this connection in his popular presentation (Ref. 4).
 30. For example, the principle of extremal aging can be used to derive expressions for energy and angular momentum of a satellite moving in the Schwarzschild metric. See, for example, E. F. Taylor and J. A. Wheeler, *Scouting Black Holes*, desktop published, Chap. 11. Available from Taylor (Website in Ref. 28).

Základy modernej fyziky dneška II: Kvantová mechanika (podľa knihy R.P. Feynmana: QED – The Strange Theory of Light and Matter)

Jozef Hanč, Slavomír Tuleja, Martina Hančová

Abstract: Fundamentals of Contemporary Physics II: Quantum mechanics

Logic line of introductory course of quantum physics is presented. The course is based on Feynman's sum-over-paths theory and now is being offered by E.F. Taylor for high-school teachers and other students at the MIT in the USA. Vector algebra and high-school mathematics are all the mathematics needed (no partial differential equations). The treatment starts with photons, which obey the fundamental principle: Explore all paths. The basic features of light (reflection, refraction, dispersion, interference...) are analysed just using this principle together with addition of quantum arrows. The unique treatment continues with nonrelativistic description of the behaviour of electrons. First, the classical action for a segment of a path is derived. The actions together with the principle of least action provide seamless transition between quantum and classical mechanics. Then, the wave function, the propagator and description of bound states arise naturally from the application of the simple principles. Students use computers, which help them come round complicated mathematics and often provide a deeper sense of the quantum phenomena.

Teória relativity sa zaoberá dvoma extrémnymi tvármi prírody. Sú to: svet *veľmi veľkých rýchlostí* a svet *veľmi veľkých rozmerov*. Na druhej strane kvantová mechanika popisuje ďalšiu extrémnu tvár prírody: svet *miniaturálnych rozmerov*. Základy unikátneho zoznamenia sa s týmito extrémnymi podobami prírody položili dvaja „giganti vedy“. Ako sme spomenuli v prvej časti, súčasná relativita spočíva najmä na myšlienkach Johna Archibalda Wheelera, ktorý zaviedol pojem „čierna diera“. Kvantová mechanika a jej tajomstvá spočívajú zase na Richardovi Feynmanovi, Wheelerovom doktorandovi, ktorému bola v oblasti kvantovej fyziky udeľená Nobelova cena. Kým v relativite Taylor používa diferenciálny a integrálny počet, tak v kvantovej mechanike ide ďalej. Explicitne tam nie je žiadna derivácia alebo integrál, žiadne komplexné číslo, žiadny vlnový formalizmus, žiadna zmienka o fázovej, či grupovej rýchlosti a čo je hlavné, nie sú tam žiadne parciálne diferenciálne rovnice – všetko len v rámci stredoškolskej matematiky!

Ako je to možné? Veď mnohí z nás si predstavujú kvantovú mechaniku ako nudný, zložitý a značne abstraktný svet komplexných vlnových funkcií a komplexných integrálov, ovládaný slávnou Schrödingerovou parciálnou diferenciálnou rovnicou. Dá sa vôbec bez týchto vecí preniknúť fundovane a bez skreslenia pod rúško tajomstva kvantovej mechaniky? Za kladnú odpoveď môžeme vďaka pedagogickému majstrovstvu a skvelej knižke Richarda Feynmana *QED¹ – Nezvyčajná teória svetla a hmoty²*. A myšlienke Edwina Taylora – použiť

výkonné osobné počítače a prepracovaný softvér, čím sa študenti stretávajú s rovnicami a matematikou oveľa neskôr. Matematika tak nezatemňuje fyzikálny zmysel výsledkov, čo študentom poskytuje omnoho hlbší a menej abstraktný pohľad na dianie v mikrosвете aj v makrosвете. V tomto článku sa budeme podrobne venovať druhej časti kurzu – kvantovej mechanike.

Poodhalenie tajomstiev kvantovej mechaniky Úvod do kvantovej mechaniky s využitím počítačov

Skôr ako pristúpi Taylor k nerelativistickej kvantovej mechanike, opisujúcej napr. správanie elektrónov, začína jeho kurz (tak ako Feynmanova kniha) *fotónmi* a známymi optickými javmi, pričom využíva prvú polovicu Feynmanovej knihy ako študijný text. Tieto relativistické častice by nemali byť zahrnuté do nerelativistickej kvantovej mechaniky.

Uvedieme jednotlivé kroky prezentácie Feynmanovej kvantovej mechaniky opisujúcej správanie fotónov:

Fotón

- 1) **Svetlo je prúdom častíc, fotónov:** Feynman tu uvádza jednoduché argumenty, aj pokusy, prečo je svetlo *prúdom častíc* a nie *vlnením*, a prečo úspešná vlnová teória, ktorá pokorila Newtonove predstavy o svetle, predsa len stroskotala.
- 2) **Čiastočný odraz svetla:** Cesta kvantovou fyzikou začína čiastočným odrazom svetla, ktorý je jedným z najznámejších optických javov. (Určite si spomeniete na slabý odraz vašej tváre v studničke alebo na okne, či na dúhové farby na špinavej mláke znečistenej olejom z áut alebo na perí kolibríkov a pávích kohútov). Z každých sto fotónov, ktoré kolmo dopadnú na sklo (napr.

¹QED je skratka pre *kvantovú elektrodynamiku*, predstavujúcu špeciálny prípad takzvanej *kvantovej teórie poľa*. Ide o teóriu, ktorá okrem jadrovej fyziky a gravitácie, popisuje – pravdivo – úplne všetko (vrátane celej chémie a biológie). Nerelativistickú Schrödingerovu kvantovú mechaniku možno považovať za prvé priblíženie k tejto teórii. Teoretické hodnoty mnohých veličín totiž možno rozložiť do radu s mocninami tzv. *konštanty jemnej štruktúry* α a v tomto rade je prvým členom to, čo dáva Schrödingerova teória.

²Táto kniha je asi najprístupnejším výkladom QED, aký si len možno predstaviť. Kniha podáva súhrnný obraz o stave poznania do 90-rov nášho storočia v tomto odvetví vedy a je prepisom prednášok, ktoré predniesol Feynman na UCLA pre *laickú nefyzikálnu verejnosť*. Pre jej čítanie nie sú potrebné žiadne priebežné vedomosti z fyziky. V celej knihe sa Feynman pokúša dosiahnuť maximálnu jasnosť a jednoduchosť bez toho, aby sa *uchýľil ku kompromisu a skreslil*

pravdu, pričom ide o kvalitatívny popis *bez použitia jedinej rovnice*. (Kniha by mala byť dostupná na slovenskom knižnom trhu v marci roku 2000).

okna), sa v priemere 4 odrážajú späť a 96 prechádza³. Ako sa fotón dovŕti, či sa má odraziť alebo prejsť? Feynman uvádza niekoľko teórií a vysvetľuje, prečo každá zlyhá. Ešte viac záhad dáva čiastočný odraz od dvoch alebo viacerých povrchov. Ak uvažujeme o veľmi tenkej sklenenej tabuli s rovnobežnými povrchmi, tak fotóny majú možnosť odrážať sa od čelného aj zadného povrchu. Mohli by sme očakávať, že z čelného sa odrazia 4% svetla. Od zadného povrchu tiež 4%, čo dokopy dáva okolo 8%. V skutočnosti sa udeje to, že počet fotónov prichádzajúcich do A je zriedkakedy 8 zo 100 a mení⁴ sa od 0 po 16.

3) **Vysvetlenie čiastočného odrazu – súčet cez všetky dráhy, využívajúci kvantové stopky.** Výsledok čiastočného odrazu môžeme správne predpovedať, ak budeme predpokladať, že fotón skúma všetky dráhy (nejde len po jednej) medzi zdrojom svetla a detektorom, napr. našim okom. Fotón má dve alternatívne možnosti, ako sa dostať do oka: odrazom od čelného alebo od spodného povrchu. Fotón skúma obidve dráhy a počas skúmania každej dráhy sa otáča šípka, predstavujúca ručičku imaginárnych kvantových stopiek. Pre každú dráhu teda existuje jedna šípka – tzv. *kvantová amplitúda* (*amplitúda pravdepodobnosti*). Výsledná amplitúda pre oko je vektorovým súčtom jednotlivých šípok v konečných polohách po skúmaní. Pravdepodobnosť toho, že fotón bude zachytený detektorom je úmerná druhej mocnine dĺžky tejto výslednej šípky⁵. Výsledky sa zhodujú s pozorovaním.

4) **Frekvencia otáčania ručičky kvantových stopiek fotónu.** Všetky výsledky vychádzajú správne vtedy, ak frekvenciu prevezmeme z klasickej vlnovej teórie, t.j. keď ručička myslených kvantových stopiek rotuje s frekvenciou zodpovedajúcou elektromagnetickej vlne. Alebo k tomuto výsledku môžeme dôjsť aj inak: ak vychádzame zo známeho Einsteinovho vzťahu (tento Feynman nepoužíva) pre energiu fotónu $E = hf$ (h je Planckova konštanta)⁶:

$$f = E/h \quad (\text{pre fotón})$$

Feynman vo svojej knihe nádherne vysvetľuje pomocou tohto princípu takmer všetky ďalšie známe optické javy: odraz svetla; lom svetla; priamočiare šírenie svetla; ohyb svetla; šošovky; difrakciu na mriežkach a štrbinách; fatamorgánu; Fermatov princíp – základ geometrickej optiky. V Taylorovom kurze je navyše každý krok knihy doprevádzaný dômyselne vytvoreným softvérom, s obzvlášť jednoduchým ovlá-

daním. To umožňuje získať študentovi patričnú predstavu a intuíciu, keďže počítač názornými animáciami doslova imituje správanie fotónov. Študent si napr. myšou môže navoliť v daných situáciách dráhy, ktorými má fotón letieť. Počítač vykresľuje pre každú z nich šípku (amplitúdu) a sčítava ich. Je pomocným nástrojom pre čo najefektívnejšie skúmanie javov.

Pre zaujímavosť uvádzame vysvetľujúci text (skrátenej) pre *zákon odrazu* – uhol dopadu sa rovná uhlu odrazu:



Obr. 1 Pri klasickom pohľade na svet predpokladáme, že zrkadlo bude odrážať svetlo tam, kde sa uhol dopadu rovná uhlu odrazu

Nech v S je zdroj (obr.1), ktorý emituje naraz len jeden fotón⁷ jednej farby (použijeme červené svetlo). Do P umiestnime detektor v rovnakej výške – kreslenie šípok bude ľahšie, keďže situácia je symetrická. Chceme vypočítať pravdepodobnosť cvaknutia detektora potom, čo bol zo zdroja emitovaný fotón. (Budeme uvažovať len dráhy fotónu dotýkajúce sa zrkadla, čo dosiahneme tienidlom v Q).

Teraz by sme očakávali, že všetko svetlo, ktoré dorazí do detektora sa odrazilo od stredu zrkadla, pretože práve ten je miestom, kde sa uhol dopadu rovná uhlu odrazu. Zdá sa byť zrejmé, že konce zrkadla⁸ s tým nemajú nič spoločné, však?

V experimente s čiastočným odrazom od dvoch povrchov existovali dva spôsoby ako mohol ísť fotón zo zdroja do detektora. V tomto experimente existujú milióny ciest, ktorými by mohol fotón ísť: mohol by letieť k bodom A alebo B v ľavej časti zrkadla a potom sa odraziť do detektora (obr. 2); mohol by sa odraziť aj od miesta, od ktorého si myslíte, že by sa mal – od G; alebo by tiež mohol zaletieť až k pravej strane zrkadla a odraziť sa z K, alebo M. Mohli by ste si pomyslieť, že som sa zbláznil, pretože vo väčšine spomenutých spôsobov, ktorými by sa fotón mohol od zrkadla odraziť, nie sú uhly rovnaké. Ale ja som sa nezbláz-

³ Presne vzaté uvedený počet odrazených fotónov treba chápať pri ich dopade na jednoduché rozhranie vzduch-sklo, ako uvádza Feynman[2], kde detektor je súčasťou skleneného prostredia, a takto medzi detektorom (detekujúcim 96 prechádzajúcich fotónov) a zdrojom (100 vyžiarených fotónov) je len jedno rozhranie typu vzduch-sklo, z ktorého sa odrazia 4 fotóny smerom späť ku zdroju. Sklom typu okno sa zaoberá až text, ktorý nasleduje.

⁴ Máme tu na mysli detektor registrujúci odrazené fotón smerom späť ku zdroju. Avšak ako ukazujú niektoré experimenty vlnová teória nie je správna.

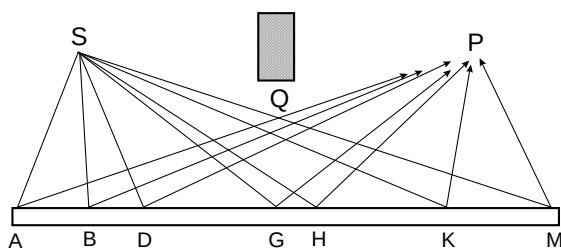
⁵ Máme tu na mysli, rovnako ako Feynman, ideálny detektor, ktorý registruje každý fotón, ktorý sa v detekčnej časti vyskytne.

⁶ Feynman sa o uvedený zákon neopiera - v skutočnosti to nie je ani nutné. Chce sa zrejme vyvarovať podozreniu, že stavia vysvetlenie na javoch, ktoré by mohli byť aj dôsledkom jeho všeobecných princípov.

⁷ Interferencia je fyzikálny jav a v rámci kvantovej teórie je dôsledkom princípu superpozície. Študenti majú občas problémy pochopiť, že podľa našich predstáv interferuje fotón vždy sám so sebou (kvantová teória hovorí „nikdy nie s iným fotónom“). Aby sme sa vyhlí prípadnému problematickému chápaniu tohoto javu, vyššie načrtnutý myšlienkový experiment predpokladá, že v našom systéme sa v danom okamihu nachádza vždy len jeden fotón, čo vyjadrujeme slovami „zdroj emituje naraz len jeden fotón“. Je vhodné dodať podmienku, že svetlo má veľmi malú intenzitu. Experimentálne overovanie toho, že každý fotón interferuje sám so sebou, overil Janossy poukázaním na zistenie, že interferencia nie je závislá od intenzity zdroja a nevymizne ani pri extrémne nízkych intenzitách.

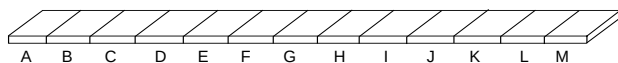
⁸ Máme tým na mysli samozrejme časti zrkadla v blízkosti jeho okrajov (koncov), vzdialených od stredu zrkadla.

nil, pretože svetlo sa takto skutočne správa! Ako je to možné?



Obr. 2 Z kvantového pohľadu na svet vyplýva, že svetlo má rovnakú amplitúdu pre odraz z každej časti zrkadla od A do M..

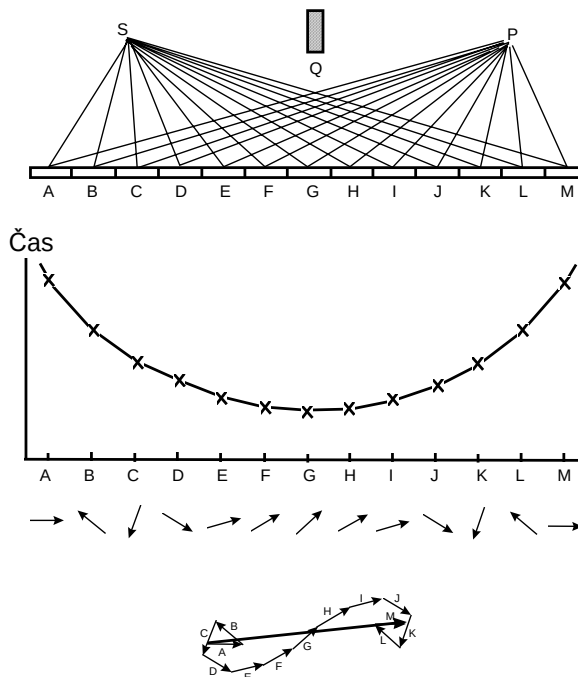
Kvôli ľahšiemu pochopeniu tohoto problému predpokladajme, že zrkadlo je tvorené iba dlhým prúžkom (obr.3) – tým iba na chvíľu zabudneme, že zrkadlo tiež vytŕča z papiera. Spravme približenie tým, že dočasne rozdelíme zrkadlo na istý počet maličkých štvorčiek a budeme predpokladať, že pre každý štvorček existuje iba jedna cesta. Náš výpočet bude presnejší (ale namáhavejší), keď budeme štvorčeky zmenšovať a tak uvažovať viac ciest.



Obr. 3 Kvôli zjednodušeniu výpočtu, budeme dočasne uvažovať iba tenký prúžok zrkadla. Toto zjednodušenie sa v žiadnom ohľade neodchýľuje od presnej analýzy situácie.

Teraz nakreslíme pre každý spôsob malú šípku. Každá takáto malá šípka má určitú dĺžku a určitý smer. Najprv si všimnime dĺžku. Mohli by ste si myslieť, že šípka, ktorá reprezentuje cestu, ktorá ide cez stred zrkadla v G, je bezpochyby najdlhšia (keďže to vyzerá tak, že každý fotón, ktorý sa dostane do detektora musí s veľkou pravdepodobnosťou prejsť touto cestou), a šípky pre cesty pri koncoch zrkadla musia byť veľmi krátke. Nie, nie! Správne pravidlo je v skutočnosti omnoho jednoduchšie: fotón, ktorý dosiahne detektor, môže po ľubovoľnej dráhe letieť s približne rovnakou šancou, takže všetky malé šípky majú skoro tú istú dĺžku. Predpoklad o tom, že malé šípky sú skoro rovnaké, je veľmi dobrý. Takže každá malá šípka, ktorú nakreslíme, bude mať štandardnú dĺžku. Keďže máme do činenia s množstvom takýchto malých šípok, reprezentujúcich množstvo dráh, po ktorých by svetlo mohlo ísť, vyberiem túto dĺžku veľmi malú.

Smery šípok sa však budú zreteľne líšiť, pretože ich časy sú rôzne. Smer danej šípky je určený konečnou polohou ručičky myslených kvantových stopiek, ktoré merajú čas fotónu pri jeho pohybe po určitej dráhe. Keď fotón zaletí až k ľavému koncu zrkadla do A, a potom vyjde hore do detektora, potrvá mu to zreteľne dlhší čas, ako fotónu, ktorý sa odráža do detektora v G. Ako pomôcku pre výpočet smeru šípok, nakreslím teraz pod schémou zrkadla graf (obr.4). Presne pod každým miestom na zrkadle, od ktorého by sa mohlo svetlo odrázať, znázorním vertikálne, koľko času by svetlu trvalo, keby šlo touto cestou.



Obr. 4 Ku každej ceste fotónu, je na grafe zakreslený zodpovedajúci bod. Poloha tohto bodu dáva informáciu o tom, koľko svetlu trvá cesta zo zdroja do zodpovedajúceho miesta zrkadla a odtiaľ do detektora. Pod grafom sú šípky so zodpovedajúcimi smermi a na spodku je výsledok ich sčítania. Šípky E až I prispievajú k dĺžke výslednej šípky najviac. Ich smery sú skoro rovnaké, lebo aj čas na ich dráhach je skoro rovnaký. Navyše tento čas je aj najmenší. Preto je približne správne, ak povieme, že svetlo letí po dráhe s najkratším časom.

Čas, ktorý fotón potrebuje na prejdienie cesty s odrazom v A, je poriadne dlhý, takže bod na grafe je poriadne vysoko. Ako sa približujeme k stredu zrkadla, čas na prejdienie zodpovedajúcej dráhy sa zmenšuje, takže každý nasledujúci bod nakreslíme nižšie ako predchádzajúci. Potom, čo prejdeme stredom zrkadla, sa čas potrebný na prejdienie každej nasledujúcej cesty predlžuje, takže naše body sú stále vyššie a vyššie. Pre lepšiu predstavu body spojíme. Vytvárajú symetrickú krivku, ktorá začína vysoko, ide dole a potom sa opäť vracia hore.

Čo z toho vyplýva pre smer malých šípok? Smer danej šípky zodpovedá času, ktorý fotón potrebuje na prejdienie zo zdroja do detektora po danej dráhe. Začnime naľavo a kreslíme šípky. Cesta A zaberie najviac času; jej šípka má určitý smer (obr.4). Šípka zodpovedajúca dráhe B má iný smer, pretože jej čas je iný. Šípky F, G a H v strede zrkadla ukazujú skoro tým istým smerom, pretože im zodpovedajúce časy sú skoro rovnaké. Po prejdieni stredom zrkadla vidíme, že každá cesta na pravej strane zrkadla korešponduje s cestou na ľavej strane s rovnakým časom (to je dôsledok toho, že sme vhodne umiestnili zdroj i detektor). Poďme teraz tieto malé šípky sčítat (obr.4). od kroku príliš líšil. Ale po chvíli začínajú šípky ukazovať v skoro rovnakom smere, a tak sa o čosi posunieme. Nakoniec sú smery od jedného kroku k druhému opäť dosť rozdielne, takže sa opäť motáme dookola.

Zostáva nám už iba nakresliť výslednú šípku. Jednoducho spojíme „päťu“ prvej malej šípky s „hlavou“ poslednej (obr.4). A dostávame patrične veľkú výslednú šípku! Kvantová elektrodynamika predpovedá, že svetlo sa skutočne odrazí od zrkadla! Čo určuje výslednú dĺžku šípky? Po prvé to, že konce zrkadla nie sú dôležité: malé šípky sa pri koncoch točia dookola prakticky na tom istom mieste. Keby som odsekol konce zrkadla–s ktorými som, ako ste asi tušili, strácal zbytočne čas– skoro vôbec by to neovplyvnilo dĺžku výslednej šípky. Najpodstatnejšie prispieva k dĺžke výslednej šípky tá časť zrkadla, v ktorej majú všetky šípky skoro ten istý smer–pretože ich čas je skoro rovnaký. Ak sa pozriete na graf zobrazujúci čas (obr. 4), uvidíte, že na dne krivky sa čas pri prechode od jednej cesty k druhej skoro nemení. Práve tam je čas najmenší.

Použitá literatúra:

- [1] Taylor, E. F., Vokos, S., O'Meara, J. M., Thornber, N. S. : „Teaching Feynman's Sum Over Paths Quantum Theory“, *Comp.Phys.*12(2),190-199,1998
- [2] Feynman, R.P., Leighton, R.B. : *QED, The Strange Theory of Light and Matter*, Princeton University Press, Princeton, 1985 (Slovenský preklad bude publikovaný v Enigme v marci v roku 2000)
- [3] Feynman, R.P., Leighton, R.B., Sands, M. : *Feynmanove prednášky z fyziky*, diel 3, slovenský preklad, Alfa, Bratislava,1988
- [4] Feynman, R.P., Leighton, R.B., Sands, M. : *Feynmanove prednášky z fyziky*, diel 5, slovenský preklad, Alfa, Bratislava,1990
- [5] Feynman, R.P., Hibbs, A. R. : *Quantum Mechanics and Path Integrals*, McGraw-Hill, New York, 1965 (Ruský preklad, Mir, Moskva 1968)

Základy modernej fyziky dneška III: Kvantová mechanika (podľa knihy E. F. Taylora: Demystifying Quantum Mechanics – Poodhalenie tajomstva kvantovej mechaniky)

Jozef Hanč, Slavomír Tuleja, Martina Hančová

Abstract: Fundamentals of Contemporary Physics III: Quantum mechanics

Logic line of introductory course of quantum physics is presented. The course is based on Feynman's sum-over-paths theory and now is being offered by E.F. Taylor for high-school teachers and other students at the MIT in the USA. Vector algebra and high-school mathematics are all the mathematics needed (no partial differential equations). The treatment starts with photons, which obey the fundamental principle: Explore all paths. The basic features of light (reflection, refraction, dispersion, interference...) are analysed just using this principle together with addition of quantum arrows. The unique treatment continues with nonrelativistic description of the behaviour of electrons. First, the classical action for a segment of a path is derived. The actions together with the principle of least action provide seamless transition between quantum and classical mechanics. Then, the wave function, the propagator and description of bound states arise naturally from the application of the simple principles. Students use computers, which help them come round complicated mathematics and often provide a deeper sense of the quantum phenomena.

Elektrón

Napokon sme sa dostali k nerelativistickej kvantovej mechanike popisujúcej správanie elektrónu. Elektrón – nositeľ elementárneho elektrického náboja – možno považovať za jednoduchú bodovú časticu, ktorá však podlieha zvláštnostiam kvantového sveta. Jednoduchosť a správanie elektrónu (to isté možno povedať o fotóne a o všetkých ostatných časticách) s vtipom opisuje E. Taylor (pozri [3], str. 372):

„Jedného dňa pred rokmi mi svitlo, že elektrón je hlupák. Alebo, aby som neurazil jeden z Božích výtvorov, radšej poviem, že elektrón je slabomyseľný. O tom niet pochyb! ... Elektrón, ktorý neprekypuje žiadnou inteligenciou, nemôže vedieť nič o komplikovaných postulátoch kvantovej mechaniky alebo o Schrödingerovej parciálnej diferenciálnej rovnici. Elektrón je tak tupý, že si pri svojom pohybe nemôže vybrať jednu dráhu. Potrebuje jednoduchšie inštrukcie....

Feynman stojí rozkročmo ponad Vesmír a vydáva trojslovnú inštrukciu. Je taká jednoduchá, že ju dokáže pochopiť každá častica: *Preskúmaj všetky dráhy!* Častice sú tak slabomyseľné, že si nedokážu vybrať len jednu dráhu, takže ich radšej preskúmajú všetky. Nuž a z tohoto slepého skúmania pramena všetky podstatné prekvapenia, paradoxy, nezvyčajnosť — ale aj sila! — kvantovej mechaniky.“

Tu sú jednotlivé kroky Taylorovej prezentácie (podľa [3], alebo podrobnejšie v [1] a [4]), pričom každý krok je sprevádzaný patričným softvérom:

- 1) **Základný príkaz** pre elektrón znie: *Preskúmaj všetky dráhy!*
- 2) Pri skúmaní každej z možných dráh sa otáčajú **myslené tzv. kvantové stopky** (podobne ako v prípade fotónu). Predtým relativistický kameň nosil „náramkové“ hodinky¹, teraz má Feynmanov zvedavý elektrón pri sebe stopky.

- 3) **Výsledná šípka – amplitúda pravdepodobnosti** príchodu do detektora je výsledkom sčítania všetkých šípok – ručičiek kvantových stopiek od všetkých možných dráh.
- 4) **Pravdepodobnosť detekcie** v detektore sa vypočíta z druhej mocniny dĺžky výslednej šípky. Presnejšie základ Feynmanovho prístupu a zapisuje Taylor do nasledujúcich postulátov:

Veľký princíp: *Pravdepodobnosť udalosti je úmerná druhej mocnine dĺžky výslednej šípky, ktorú nazývame „kvantová amplitúda“ (resp. amplitúda pravdepodobnosti)*

Pravidlo pre alternatívne dráhy: *Keď udalosť môže nastať viacerými spôsobmi, zobrazte šípku pre každý spôsob a potom ich sčítajte. Výsledok je výslednou šípkou spomínanou vo Veľkom princípe.*

Pravidlo pre po sebe idúce kroky na každej dráhe: *Keď každý spôsob, ktorým môže udalosť nastať, pozostáva zo sledu po sebe idúcich krokov, tak uvažujete o každom kroku ako o skrátení a pootočení malej šípky. Vynásobte skrátene pre všetky kroky na danej dráhe a sčítajte uhly všetkých krokov na tejto dráhe. Získate tak šípku pre celkovú dráhu, ktorú potom pričítavate k ostatným šípkam od zvyšných dráh. Výsledok predstavuje výslednú šípku spomínanú vo Veľkom princípe.*

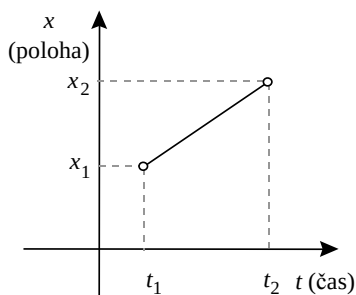
- 5) **Princíp najmenšieho účinku.** Ako rýchlo sa otáčajú kvantové stopky elektrónu, keď skúma danú dráhu? Kým odpovie Taylor na túto otázku, študenti sa zoznámia s inou formuláciou klasickej mechaniky, a to cez klasický princíp najmenšieho účinku. Prečo? Nie je to komplikácia? Nie! Neskôr sa ukáže, že účinok je veličinou, ktorá spája klasickú mechaniku s kvantovou. Úsilie vynaložené v tomto kroku je odmenené jednou z najväčších výhod Feynmanovho prístupu ku kvantovej mechanike. Poskytuje *bezbolestný, plynulý a neabstraktný* prechod medzi klasickou a kvantovou

¹ Pozri S.Tuleja, J. Hanč, M. Hančová, „Základy modernej fyziky dneška I: Všeobecná teória relativity (Podľa E.F.Taylor, J.A.Wheeler, Exploring Black Holes: Introduction to General Relativity)“, OMFI 1/2000 (29), 37-46

mechanikou. Feynman vo svojich známych prednáškach z fyziky ([5], kapitola 19) podáva jedinečné zoznámenie sa s princípom najmenšieho účinku, pomocou ktorého vytvoril Taylor jednoduchší text. K tomu pridal softvér obchádzajúci variačný počet, ktorý je potrebný na to, aby sme ukázali ekvivalentnosť princípu s Newtonovými zákonmi. Táto časť obsahuje prvé rovnice, s ktorými sa stretávajú študenti v kvantovej mechanike a je to matematicky najnáročnejšia časť, ktorú Taylor použil vo výklade kvantovej mechaniky.

Túto náročnosť demonštrujeme ([4], kap. The Principle of Least Action) na nasledujúcom odvodení:

Klasický princíp najmenšieho účinku hovorí, že častica v potenciáli sa pohybuje po dráhe s najmenším účinkom (správnejšie extrémnym). Veľmi efektívne a hlavne názorne možno pohyb popísať graficky, a to grafom závislosti dráhy na čase. Predstavme si elektrón pohybujúci sa rovnomerne po priamke v gravitačnom poli – jednorozmerný prípad – tak ako je to na obr. 5.



Obrázok 5. Graf závislosti dráhy na čase, pri rovnomernom pohybe elektrónu, ktorý elektrón vykonal z bodu $[t_1, x_1]$ do bodu $[t_2, x_2]$. V prípade elektrónu vrhnutého v gravitačnom poli Zeme je takýto pohyb nereálny. Má však tú výhodu, že preň možno ľahko účinok vypočítať. Podľa teórie relativity nazývame tento graf svetočiara, bod na svetočiare udalosť a celý obrázok priestoročasový diagram.

Áký je účinok pre túto dráhu, resp. svetočiaru? Podľa Feynmanových prednášok ([5], kap. 19) je účinok definovaný výrazom:

$$\text{účinok} \equiv S \equiv \int_{t_1}^{t_2} (KE - PE) dt \quad (1)$$

kde t_1 a t_2 sú okamihy počiatkovej a koncovkej udalosti.

Uvažujme zjednodušený prípad, keď $x_1 = 0$ a $t_1 = 0$ (zovšeobecnenie je už potom ľahké):

$$\text{účinok} = S = \int_0^{t_2} (KE - PE) dt = \int_0^{t_2} KE dt - \int_0^{t_2} PE dt \quad (2)$$

Prvý z integrálov možno vyjadriť v tvare²³:

²³Nezľaknite sa integrálov. Taylor používa v podstate len ich označenie. Značka integrálu je z natiahnutého písmena S, čo je začiatok slova suma, alebo súčet. Takže tieto integrály, ako všetky integrály, naznačujú, že sa niečo *sčítava*. V prípade prvého integrálu

$$\int_0^{t_2} KE dt = (KE_a dt_a + KE_b dt_b + KE_c dt_c + \dots) \quad (3)$$

Náš prípad zobrazuje priamy úsek svetočiar s konštantným sklonom (smernicou), ktorý znamená konštantnú *rýchlosť*, aj konštantnú *kinetickú energiu*. Pozdĺž našej svetočiar možno konštantnú kinetickú energiu, označenú KE , na pravej strane rovnice (3) vyňať pred zátvorku. To, čo zostane v zátvorke, je práve súčet malých časových úsekov medzi $t = 0$ a $t = t_2$. Tento súčet sa rovná presne času t_2 :

$$\begin{aligned} \int_0^{t_2} KE dt &= KE(dt_a + dt_b + dt_c + \dots) = \\ &= KE t_2 \quad (\text{priama svetočiara}) \end{aligned} \quad (4)$$

Toto je, v prípade priamej svetočiar, presný výraz pre prvý integrál na pravej strane rovnice (2). Druhý integrál rovnice (2) vypočítame len o trochu zložitejším spôsobom. Potenciálna energia má tvar:

$$PE = mgx \quad (5)$$

kde m je hmotnosť častice, g je gravitačné zrýchlenie a x je výška častice nad zemou. Integrál s potenciálnou energiou, označenou PE , v rovnici (2), zodpovedá sčítavaniu:

$$\int_0^{t_2} PE dt = mg(x_a dt_a + x_b dt_b + x_c dt_c + \dots) \quad (6)$$

Nikto nám nemôže zabrániť v tom, aby sme zobrali všetky intervaly času dt rovnaké:

$$\begin{aligned} \int_0^{t_2} PE dt &= mg(x_a dt + x_b dt + x_c dt + \dots) = \\ &= mg(x_a + x_b + x_c + \dots) dt \end{aligned} \quad (7)$$

Teraz predpokladajme, že časový interval t_2 je rozdelený na N rovnakých úsekov veľkosti dt . Potom môžeme písať:

$$dt = \frac{t_2}{N} \quad (8)$$

Dosaďme tento výraz do rovnice (7) a šikovne premiestnite N pod súčet x -ových členov:

$$\int_0^{t_2} PE dt = mg \left[\frac{x_a + x_b + x_c + \dots}{N} \right] t_2 \quad (9)$$

na pravej strane rovnice (2), súčet obsahuje veľa malých príspevkov $KE dt$. Na každom krátkom časovom intervale vynásobíte kinetickú energiu KE dĺžkou tohto intervalu dt a všetky takto získané malé súčiny sčítate dokopy.

³ Veličinami $dt_a, dt_b, \dots$ sa rozumie rozdelenie časového intervalu $[0, t_2]$ na *elementárne po sebe idúce časové úseky, ktoré splňujú podmienku* $dt_a + dt_b + dt_c + \dots = t_2 - 0 = t_2$

Výraz v hranatých zátvorkách nie je ničím iným ako priemernou hodnotou x pozdĺž svetočiary, čo je presne hodnota zodpovedajúca jej stredu (keďže je to úsečka):

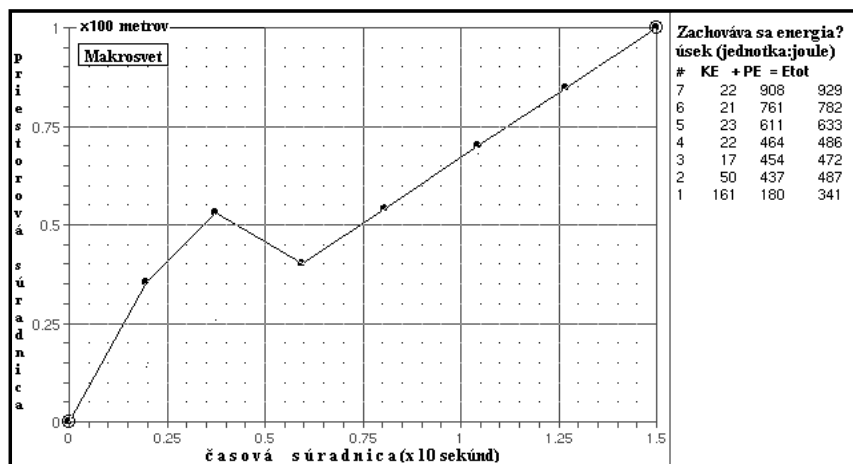
$$\left[\frac{x_a + x_b + x_c + \dots}{N} \right] = \frac{x_2}{2} \quad (10)$$

S použitím tejto substitúcie rovnica (9) prechádza na tvar:

$$\int_0^{t_2} PE dt = mg \frac{x_2}{2} t_2 = PE_p t_2 \quad (11)$$

S týmto vzťahom už môže počítač vypočítať účinok pre hocijakú trajektóriu, pretože každú svetočiaru možno nahradiť veľkým množstvom priamych úsekov – lomenou čiarou (obr.6).

6) Frekvencia otáčania ručičky kvantových stopiek elektrónu. Vráťme sa teraz ku kvantovej mechanike a všimnite si, že teraz už hovoríme o svetočiach v priestoročasových diagramoch a nie o trajektóriách v priestore. Presnejšie povedané elektrón sa riadi príkazom: *Preskúmaj všetky svetočiary.* Veľmi



Obrázok 6. Obrazovka počítača ilustruje princíp najmenšieho účinku. V priestoročasovom diagrame je vykreslená pokusná svetočiaru častice v gravitačnom poli Zeme. Študent si môže zvoliť prakticky ľubovoľný počet bodov svetočiary, ťahať za tieto body, čím aproximuje hocijakú krivku. Súčasne počítač vypisuje energie na jednotlivých úsekoch krivky a celkový účinok, takže je možné nájsť svetočiaru s minimálnym účinkom, pri ktorej (a len pri nej) sa zachováva celková energia.

kde PE_p je priemerná potenciálna energia pozdĺž svetočiary. Tento výraz je znova pre priamu svetočiaru presný. Nakoniec pre našu svetočiaru z bodu $[0,0]$ do bodu $[t_2, x_2]$ má účinok hodnotu:

$$\text{účinok} = S = \int_0^{t_2} (KE - PE) dt = (KE - PE_p) t_2 \quad (12)$$

Alebo vo vyjadrení pomocou koncových bodov svetočiary:

$$\text{účinok} = S = \frac{1}{2} m \left(\frac{x_2}{t_2} \right)^2 t_2 - mg \frac{x_2}{2} t_2 \quad (13)$$

Vo všeobecnejšom prípade, keď častica začína v bode $[t_1, x_1]$ platí (čo sa dá jednoducho zdôvodniť) vzťah:

$$\begin{aligned} \text{účinok} &= S = (KE - PE_p)(t_2 - t_1) = \\ &= \frac{1}{2} m \left(\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \right)^2 (t_2 - t_1) - mg \frac{(x_2 + x_1)}{2} (t_2 - t_1) \end{aligned} \quad (14)$$

dômyselnými a hlavne názornými argumentmi, ktoré možno konfrontovať so svojou skúsenosťou (oveľa jednoduchšími a menej abstraktnými ako pri postulovaní Schrödingerovej rovnice), postulujeme pre stopy elektrónu:

Fundamentálny postulát

$$f = \frac{KE - PE}{h} \quad (15)$$

Toto je frekvencia otáčania ručičky stopiek pri tom, ako elektrón skúma danú dráhu (porovnajme s prípadom fotónu, kde sme určili túto frekvenciu $f = E/h$). Pomocou sčítavania nájdeme počet otáčok pozdĺž svetočiary: Počas malého časového intervalu dt , je počet otáčok (alebo časť otáčky) $f dt = (KE - PE) dt/h$. Toto sčítame pre všetky časové okamihy pozdĺž svetočiary a dostávame **fundamentálny vzťah** nerelativistickej mechaniky pre časticu s nenulovou pokojovou hmotnosťou:

Fundamentálny vzťah

$$\left(\frac{\text{počet otáčok}}{\text{pozdĺž svetočiary}} \right) = \frac{\int_{\text{pozdĺž svetočiary}} (KE - PE) dt}{h} = \frac{\text{účinkom}}{h} = \frac{S}{h} \quad (16)$$

7) Prechod medzi kvantovou a klasickou mechanikou.

Aký je rozdiel medzi svetom kvantovým a klasickým? Klasická mechanika sa líši od kvantovej mechaniky v tom, že v nej častica ide po jednej svetočiare, zatiaľ čo v kvantovej mechanike častica skúma všetky svetočiary. V kvantovom prípade každá svetočiara prispieva šípkou – ručičkou kvantových stopiek tej istej dĺžky. Väčšinou existuje svetočiara s minimálnym počtom otáčok (resp. účinkom, keďže počet otáčok je úmerný účinku). Zväzok svetočiar blízko tejto svetočiary dáva šípky ukazujúce viac menej tým istým smerom. Naproti tomu, šípky pre svetočiary, ktoré sú ďaleko od svetočiary s minimálnym počtom otáčok, ukazujú v úplne odlišných smeroch, a tak sa navzájom rušia. Dôsledkom toho je, že hlavný príspevok k celkovej šípke v detektore dáva len zväzok svetočiar okolo svetočiary minimálneho účinku. Prečo potom vidíme, že baseballová loptička ide len po jednej dráhe? Odpoveďou je práve vzťah (16). V prípade loptičky veľká hmotnosť v čitateli (16) (je skrytá v S) a nepatrná hodnota h Planckovej konštanty zapríčini extrémne vysokú frekvenciu (podiel veľkého čísla a malého je obrovské číslo). V tomto prípade sa aj príspevky od blízkych dráh stihnú vyrušiť, takže zväzok okolo svetočiary s minimálnym počtom otáčok je veľmi úzky. V podstate prispieva len dráha s minimálnym účinkom. A tomu hovoríme klasické správanie. Vyzerá to tak, že sa loptička pohybuje po jednej dráhe. Naproti tomu v prípade elektrónu malá hmotnosť v S vyvažuje nepatrnú hodnotu h Planckovej konštanty. Frekvencia nie je taká vysoká, preto sa stihnú prejavíť okrem dráhy minimálneho účinku aj blízke dráhy, zväzok je širší a elektrón sa nám zdá byť „rozmazaný“. Tomu hovoríme kvantové správanie.

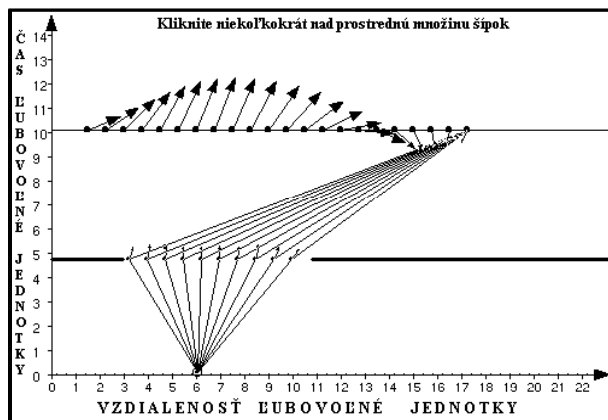
- 8) **Vlnová funkcia.** Doteraz sme sa zaoberali situáciou, keď bol elektrón detekovaný jedným pevne umiestneným detektorom. Pomocou Feynmanovho súčtu sme určovali výslednú šípku pre tento detektor. Ale tento detektor môže byť v danom čase aj na inom mieste, alebo aby sme nemuseli premiestňovať detektor, rozložíme detektory v rámci celého priestoru. V jednorozmernom prípade pozdĺž celej osi x . Ak v danom čase zistíme pre každý detektor výslednú šípku, tak dostaneme množinu šípek (obr. 7).

Vlnová funkcia v danom čase t je množina všetkých výsledných šípek – kvantových amplitúd pre tento čas v celom priestore (pozdĺž celej osi x).

Druhá mocnina dĺžky každej zo šípek v priestore, napr. v x udáva pravdepodobnosť nájdenia elektrónu na

danom mieste x a v danom čase t (pozri Veľký princíp). Vlnovú funkciu označujeme⁴ symbolom $\psi(x, t)$.

V ďalšom výklade sa ukáže, že nemusíme žiadať ani to, aby bol elektrón emitovaný z bodu – udalosti, ale že môžeme začať z počiatočnej vlnovej funkcie. Feynmanov súčet cez všetky dráhy nám opäť povie, ako sa bude vyvíjať táto vlnová funkcia v čase.



Obrázok 7. Aplikovaním teórie súčtu cez všetky trajektórie, na elektrón v dvoch časových okamihoch, vzniká predstava vlnovej funkcie prirodzeným spôsobom. Študenti si môžu zvoliť počiatočnú udalosť emisie elektrónu, rozsah prostrednej množiny šípek a taktiež čas pre neskoršiu množinu šípek. Pomocou amplitúd možných svetočiar počítač konštruje množinu amplitúd v neskoršom čase, ktorá sa nazýva vlnová funkcia. Svetočiary prechádzajú cez konečný balík šípek (amplitúd). Vlnovú funkciu možno odvodiť aj z týchto šípek v balíku bez ohľadu na počiatočnú udalosť. Program navyše poskytuje možnosť sledovať aj pravdepodobnosti.

- 9) **Propagátor.** Na obrázku 7, a vlastne doteraz, náš elektrón nevykonával základný príkaz úplne (trochu sme podvádzali, avšak zhodou okolností sú naše výsledky takmer v zhode so skutočnosťou). Elektrón skúmal z počiatočnej udalosti do koncovej na vlnovej funkcii buď len jednu dráhu, a to priamu, alebo len špeciálnu vzorku dráh. Taylor prezentuje vďaka počítaču spôsob ako možno heuristicky, a pritom jednoducho a nádherne, zaradiť príspevky od všetkých dráh. Nájde funkciu nazývanú *propagátor*, ktorá dáva presný a úplný výsledok skúmania všetkých dráh medzi jednobodovou udalosťou emisie a koncovou udalosťou detekcie elektrónu. Navyše propagátor dáva správnu odpoveď na základnú otázku kvantovej mechaniky:

Je daná šípka – kvantová amplitúda pre časticu s polohou x_1 v čase t_1 . Aká je šípka – kvantová amplitúda v polohe x_2 v čase t_2 ?

⁴ V kvantovej mechanike druhú mocninu dĺžky šípek $\psi(x, t)$ označujeme $|\psi(x, t)|^2$ a nazývame ju hustotou pravdepodobnosti.

Túto funkciu, označujeme ju $K(2, 1)$, môžeme prezentovať ako súbor jednoduchých inštrukcií (geometrických transformácií), ktoré nám povedia, čo máme s počiatočnou šípkou urobiť. Pre rôzne potenciály, vrátane nulového, je propagátor rôzny. Ak poznáme daný propagátor, môžeme jednoducho sledovať pravdivý vývoj ľubovoľnej vlnovej funkcie v danom potenciáli.

Podobne ako pri teórii relativity sa po niekoľkých týždňoch môže študent pomocou Feynmanovej teórie sumácie cez všetky dráhy ďalej zaoberať konkrétnym správaním elektrónu a to:

- vývojom ľubovoľnej počiatočnej jednorozmernej vlnovej funkcie voľnej častice (nielen elektrónu), napr. vlnových balíkov, ich rozplývaním
- správaním kvantového harmonického oscilátora, nestacionárnymi stavmi, stacionárnymi stavmi, kvantovaním energie a vzťahom pre energiu, superpozíciou stavov

Pomocou týchto poznatkov (a s využitím zvyšku Feynmanovej knihy) je študent nakoniec schopný kvalitatívne pochopiť také veci ako:

- popis správania elektrónu v atóme
- základné interakcie v kvantovej elektrodynamike, Feynmanove diagramy
- problém identických častíc; Pauliho vylučovací princíp; antičastice; virtuálne častice
- periodická tabuľka prvkov; chemická väzba; vodivosť látok; fundamentálny pohľad na čiastočný odraz svetla; prechod svetla látkou; stimulovaná emisia

Po tomto výklade kvantovej mechaniky, kde každý spomenutý krok je doprevádzaný rozsiahlym softvérom a množstvom cvičení, má študent dobré poznatky a predstavu, čo sa v skutočnosti deje (myslíme si, že skvelú fyzikálnu intuíciu). Ako ukazuje naša vlastná skúsenosť v prípade záujmu a znalosti potrebných matematických vedomostí alebo zaoberaní sa kvantovou fyzikou profesionálne, môže študent plynulo pokračovať zavedením zodpovedajúcej matematickej symboliky. Dokonca môže prejsť k takému pojmu, akým je integrál cez všetky trajektórie, slúžiaci na striktné odvodenie propagátora a taktiež k slávnemu Feynmanovmu odvodeniu Schrödingerovej rovnice.⁵ Týmto prepojením na Schrödingerovu formuláciu môže študent sledovať mikrosvet pomocou diferenciálnych rovníc, či operátorov (teraz už celkom ľahučko a neabstraktne, pretože už získal patričnú predstavu).

Na záver zhrnieme (tentoraz aj v matematickej podobe podľa [7], aby bolo viditeľné, akým spôsobom symbolický zápis zvyšuje abstraktnosť teórie) Taylorov výklad Feynmanovho prístupu ku kvantovej mechanike a porovnáme (obr.8) s tradičným výkladom Schrödingerovho prístupu. V elegantnej matematickej forme vyzerá fundamentálny postulát⁶ Feynmanovho prístupu takto: *Výsledná amplitúda pravdepodobnosti $K(2,1)$ toho, že sa elektrón dostane z bodu x_1 v čase t_1 do bodu x_2 v čase t_2 je súčtom amplitúd pravdepodobností $\phi[x(t)]$ pre všetky možné trajektórie (svetochiary) $x(t)$, ktorými sa môže dostať z bodu $[x_1, t_1]$ do bodu $[x_2, t_2]$. Amplitúdy jednotlivých trajektórií sú rovnaké, čo sa týka veľkosti, ale líšia sa vo fáze, ktorá sa rovná účinku pre danú trajektóriu vyjadrenom v jednotkách $\hbar$, t. j.*

$$K(2,1) = \sum_{\substack{\text{cez} \\ \text{všetky dráhy} \\ \text{z } 1 \text{ do } 2}} \phi[x(t)],$$

kde $\phi[x(t)] = \text{konst.} \cdot \exp(iS[x(t)]/\hbar)$

Šípka alebo kvantová amplitúda nie je ničím iným ako geometrickým znázornením komplexného čísla v Gaussovej rovine (čo je vektor). V prípade fotónov bola kvantová amplitúda geometrickým zobrazením komplexného čísla v tvare: $A \exp(i\omega t)$. Vlnová funkcia sa zvyčajne zapisuje v tvare (podľa [7], strana 70):

$$\psi(x, t) = K(x, t; x', t') = \sum_{\substack{\text{cez všetky dráhy} \\ \text{z udalostí } [x', t']}} \text{konst.} \cdot \exp(iS/\hbar)$$

Sumácia, ktorú vykonávame pri predpovedaní časového vývoja vlnovej funkcie, predstavuje vlastne aproximáciu integrálu (podľa [7], strana 55 a strana 70-71)

$$\psi(x_2, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} K(2,1) \psi(x_1, t_1) dx_1,$$

kde v prípade voľnej častice

$$K(2,1) = \left[\frac{m}{i\hbar(t_2 - t_1)} \right]^{1/2} \exp\left(\frac{im(x_2 - x_1)^2}{2\hbar(t_2 - t_1)} \right).$$

Tento vzťah pre $K(2,1)$ odvodzujú v Taylorovom kurze (pomocou [4]) študenti heuristicky.

Výklad v odstavci 7) možno demonštrovať aj kvantitatívne, a to na jednoduchom prípade. Skúmajme príspevok vzniknutý od dvoch blízkyh trajektórií.

⁵ Na PF UPJŠ v Košiciach prebehol v letnom semestri roku 2000, za spolupráce s Edwinom Taylorom, upravený kurz kvantovej mechaniky podľa Taylorovej osnovy [1], pričom študenti využívali slovenský softvér vytvorený autormi tohto článku. Čo sa týka prepojenia na Schrödingerovu formuláciu pozri [7] (str. 70-71 a str 90-92) alebo v didaktickom spracovaní tejto témy – J.Hanč: Úvod do kvantovej mechaniky pomocou Feynmanovho súčtu cez všetky trajektórie, rigorózna práca, PF UPJŠ, september 1999

⁶ Pomocou odbornejšieho fyzikálneho vyjadrovania a symboliky možno formulovať aj spomenutý Veľký princíp a pravidlá. Viď [6], str. 21 a 47.

Výsledná amplitúda má s použitím matematiky a postulátov tvar: $\varphi = A \cdot e^{iS_1/\hbar} + A \cdot e^{iS_2/\hbar}$

Využitím vlastností exponenciálneho tvaru a Eulerovho vzorca pre kosínus po úpravách máme:

$$\varphi = A \cdot e^{i(S_1+S_2)/2\hbar} \cdot \left(e^{i(S_1-S_2)/2\hbar} + e^{-i(S_1-S_2)/2\hbar} \right)$$

$$\varphi = 2A \cos\left(\frac{S_1-S_2}{2\hbar}\right) \cdot e^{i(S_1+S_2)/2\hbar}$$

Veľkosť výslednej amplitúdy teda je $2A \cos\left(\frac{S_1-S_2}{2\hbar}\right)$.

Funkcia kosínus sa len málo líši od svojej maximálnej hodnoty 1 na intervale $(-\pi/4, \pi/4)$. Vtedy je veľkosť výslednej amplitúdy približne $2A$. Teda ak je argument $\left|\frac{S_1-S_2}{2\hbar}\right| = \left|\frac{\Delta S}{2\hbar}\right| \approx \frac{\pi}{4}$, tak vtedy túto podmienku

interferencie možno prepísať aj do tvaru: $|\Delta S| \approx \frac{\pi}{2} \hbar \approx \hbar$.

Tento vzťah nám hovorí, kedy sa začína prejavovať kvantová mechanika. Je to vtedy, ak je zmena účinku medzi blízkymi trajektóriami porovnateľná s Planckovou konštantou $\hbar$.

Dúfame, že výhody celého tohto prístupu ku kvantovej mechanike boli prezentované doterajším textom. Aké sú nevýhody tohto prístupu? Sú nejaké? Áno, sú:

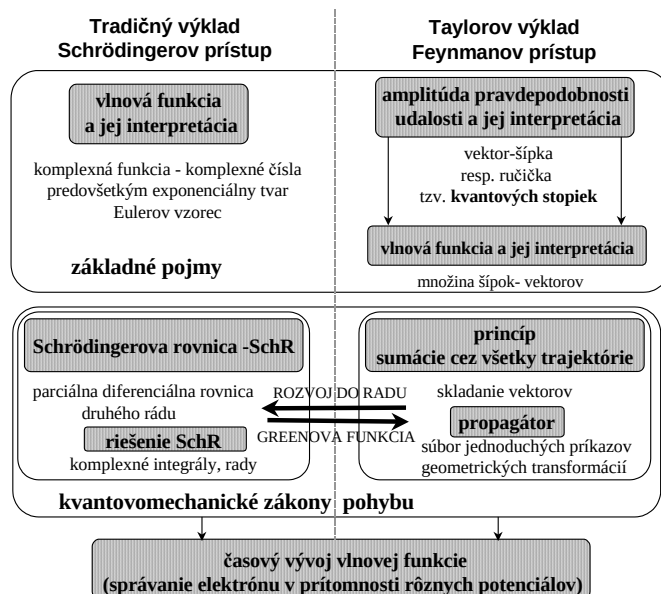
- všetko bolo prezentované len v jednorozmernom prípade
- obsahuje menej známu formuláciu mechaniky cez princíp najmenšieho účinku a úplne novú formuláciu kvantovej mechaniky (Toto je asi najväčší problém, pretože mnohí učitelia sa naučili Newtonovu formuláciu a základy Schrödingerovej formulácie ako prvé a tieto podľa nášho názoru naďalej dominujú v ich mysliach presne podľa prvého Newtonovho zákona – vďaka zotrvačnosti a odporu k akejkolvek zmene)
- vyžaduje prácu na počítačoch, pričom to musia byť kvalitnejšie počítače aspoň radu 486.

Podakovanie

Na tomto mieste chceme vyjadriť poďakovanie profesorovi Edwinovi Taylorovi z Center for Innovation in Learning, Carnegie Mellon University, ktorý spomínaný kurz prednáša na MIT, za jeho láskavý prístup a poskytnutie materiálov. Ďalej by sme chceli poďakovať prof. Ing. Slavkovi Chalupkovi, CSc. z katedry teoretickej fyziky a geofyziky UPJŠ v Košiciach za mnohé cenné pripomienky, ktoré prispeli k vylepšeniu kvality článku po obsahovej aj metodologickej stránke.

Záver

Taylorov kurz Hranice Prírody nasleduje na MIT po úvodnom kurze fyziky a zaoberá sa špeciálnou teóriou relativity, všeobecnou teóriou relativity a kvantovou mechanikou. A ide naozaj do hĺbky. Dúfame, že z týchto stručných článkov bolo možné nadobudnúť presvedčenie, že ide o schodnú cestu ako priblížiť základy modernej fyziky študentom a pritom ich nezaťažovať abstraktnou matematickou symbolikou.



Obrázok 8. Približná schéma porovnania bežného, tradičného výkladu kvantovej mechaniky, ktorý využíva Schrödingerovu formuláciu kvantovej mechaniky s Taylorovým výkladom využívajúcim Feynmanovu formuláciu. V schéme na prvej úrovni sú základné pojmy oboch formulácií a pod ňou sú kvantovomechanické zákony pre tieto formulácie. Obe dva prístupy k nerelativistickej kvantovej mechanike vedú k tomu istému a sú pri popise správania elektrónu matematicky ekvivalentné. V schéme sú zobrazené základné pojmy oboch prístupov a zákony pohybu, pričom pod jednotlivými rámečkmi je uvedená aj matematická povaha objektov.

Základom Schrödingerovho prístupu je slávna Schrödingerova rovnica, pomocou ktorej bolo možné vysvetliť nádherne, len s ceruzkou v ruke, to, čo bolo výsledkom úmornej práce fyzikov počas niekoľkých desaťročí za pomoci prístrojov. Síce v mnohých prípadoch je viac-menej matematicky jednoduchá, ale jej riešenie je vecou nevysvetľujúcej a značne abstraktnej matematiky. Navyše rovnica sa musí postulovať, argumenty pre jej tvar nie sú jednoduché a taktiež od začiatku je potrebné pasovať sa s komplexnou vlnovou funkciou.

Vo Feynmanovom prístupe je základom jednoduchý princíp sumácie cez všetky trajektórie, ktorý však v matematickej podobe vedie ku matematicky komplikovanému pojmu integrálu cez trajektórie. Tento sa vo výklade podarilo obísť použitím počítačov, a tak najzložitejšou matematickou operáciou je skladanie vektorov. Aplikáciou tohto princípu možno prejsť k pojmu vlnová funkcia neskôr (javí sa prirodzeným dôsledkom základných pojmov, ktoré majú povahu len komplexných čísel a nie komplexnej funkcie) a použitím propagátora sledovať časový vývoj vlnovej funkcie omnoho názornejšie ako v prípade diferenciálnej rovnice.

Práve propagátor je to, čo spája obe formulácie. Ak nájdeme tzv. Greenovu funkciu Schrödingerovej rovnice, tak dôjdeme k propagátoru a naopak rozvinutím výrazu pre časový vývoj vlnovej funkcie, vyjadreným pomocou propagátora, možno odvodiť Schrödingerovu rovnicu.

Nakoniec by sme prezentovali ešte niekoľko názorov E.F. Taylora, s ktorými sa plne stotožňujeme ([3], str. 375):

„Tieto predmety môžu byť prezentované bez matematického formalizmu presahujúceho obyčajný diferenciálny a integrálny počet, čo nám na vyučovaní umožní venovať čas podporovaniu a podnecovaniu intuície a predstavivosti aj v prípade neintuitívnych situácií.“

Predstavivosť a intuícia sú nutné k tomu, aby mohol študent (a tiež profesionál!) vykonávať rádové odhady, vycítiť, ktoré aspekty danej situácie sú dôležité a oplatí sa ich modelovať, a aby vedel oceniť rozdiel medzi aproximáciou a presným výpočtom. V kurze je napriek tomu množstvo presných výpočtov.

E. F. Taylor taktiež hovorí ([3], strana 36): „*Smäd verejnosti po relativite a kvantovej mechanike je neuhasiteľný. Mali by sme ho selektívne, ale bez okolkov využiť, aby sme pritiahli aj tých študentov, z ktorých sa väčšina nebude zaoberať fyzikou profesionálne. Všetci títo študenti však môžu zažiť „hlbokú fyziku“. Hocikto, komu nerobí diferenciálny a integrálny počet problémy, sa teraz môže zaoberať špeciálnou a všeobecnou teóriou relativity a kvantovou mechanikou.*“

K týmto názorom pridávame, že úvodné zoznámenie sa s relativitou a kvantovou mechanikou nielen, že môžu byť prezentované, ale mali by byť prezentované s minimom matematického formalizmu, podobne ako v prípade strednej školy, kde nikoho ani nenapadne prezentovať Newtonovu mechaniku a jej základné myšlienky cez krásny, ale náročný matematický aparát klasickej teoretickej mechaniky.

Podľa našej skúsenosti najvhodnejšími kandidátmi na poslucháčov tohoto kurzu by mohli byť naši budúci (prípadne aj súčasní) stredoškolskí učitelia fyziky, ale už pracujeme aj na otestovaní Taylorovho výkladu v podmienkach strednej školy.

Použitá literatúra:

- [1] Taylor, E. F., Vokos, S., O'Meara, J. M., Thornber, N. S.: „Teaching Feynman's Sum Over Paths Quantum Theory“. *Comp.Phys.*12(2),190-199 (1998). Podrobná osnova Taylorovej prezentácie určená pre učiteľov kvantovej mechaniky, ktorí by mali záujem vytvoriť vlastný kurz kvantovej mechaniky podľa Feynmanovej formulácie.
- [2] Feynman, R.P., Leighton, R.B : *QED, The Strange Theory of Light and Matter*. Princeton University Press, 1985. (Slovenský preklad bol publikovaný v Enigme v marci v roku 2000).
- [3] Taylor, E. F.: „The Boundaries of Nature: Special and general relativity and quantum mechanics, a second course in physics: Edwin F.Taylor's acceptance speech for the 1998 Oersted Medal presented by the American Association of Physics Teachers, 6 january 1998“, *Am. J. Phys.* **66** (5), 369-376 (1998)
- [4] Taylor, E. F.: *Demystifying Quantum Mechanics*, Draft version of July 2000. Neustále aktualizovaná a prepracovávaná cvičebnica (spolu so softvérom) určená pre študentov v rámci kurzu The Boundaries of Nature (Hranice prírody); voľne dostupná na internetovej stránke <http://www.eftaylor.com/>.
- [5] Feynman, R.P., Leighton, R.B., Sands, M.: *Feynmanove prednášky z fyziky*, Diel 3. Bratislava, Alfa, 1988. (Slovenský preklad).
- [6] Feynman, R.P., Leighton, R.B., Sands M.: *Feynmanove prednášky z fyziky*, Diel 5. Bratislava, Alfa, 1990. (Slovenský preklad).
- [7] Feynman, R.P., Hibbs, A.R.: *Quantum Mechanics and Path Integrals*. New York : McGraw-Hill, 1965. (Ruský preklad, Mir, Moskva 1968). Kniha predstavuje Feynmanov pokus začať s teóriou sumácie cez všetky trajektórie, a potom sa napojiť na tradičnú Schrödingerovu vlnovú teóriu. (Novší prístup k témam obsiahnutým vo Feynmanovi a Hibbsovi sa nachádza v Schulman, L. S.: *Techniques and Applications of Path Integration*, John Wiley, 1996, prípadne v Sakurai, J.J.: *Modern Quantum Mechanics*, Addison-Wesley Publishing company, Reading, Massachusetts, 1994)
- [8] http://web.mit.edu/physics/acad_programs/courses.htm, <http://student.mit.edu/@1194763.16176/catalog/m8a.html>. Na týchto stránkach možno získať informácie o najnovšej podobe Taylorovho kurzu Hranice prírody (čísla kurzu 8.222, resp. 8.223).