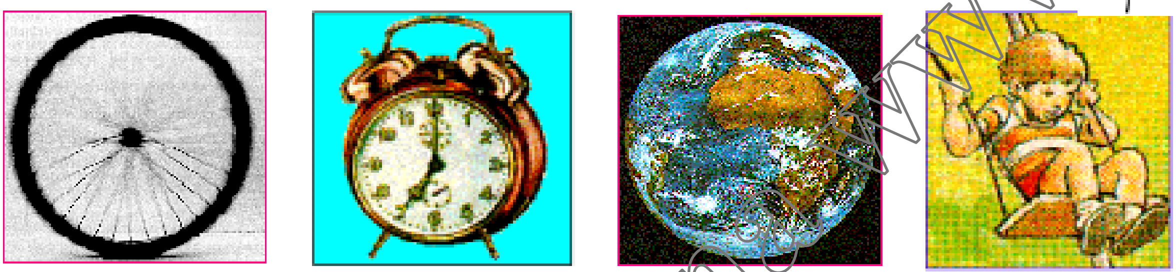
2.10 Rovnomerný pohyb po kružnici

Zopakujte si

1. Ktorý pohyb nazývame a) rovnomerný, b) zrýchlený, c) spomalený?
2. Ako vypočítame priemernú rýchlosť a priemerné zrýchlenie?
3. Ktoré vzťahy vyjadrujú závislosť dráhy rovnomerného pohybu od času?
4. Akú geometrickú vlastnosť majú tie body, ktoré patria do kružnice?

Keď má trajektória krivočiareho pohybu tvar kružnice, hovoríme o **pohybe po kružnici**.

Úloha 1
Prezrite si pozorne jednotlivé telesá na obr. 57 a rozhodnite, ktoré body telies sa pohybujú po kružnici, alebo po časti kružnice. Určte, kde ležia stredy týchto kružníc.



a *b* *c* *d*

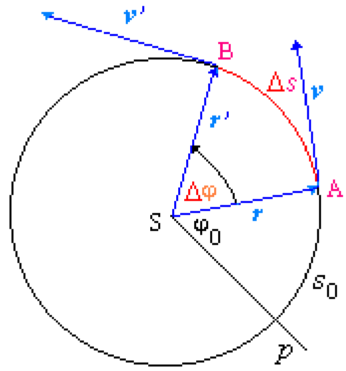
Obr. 57 Príklady pohybu k úlohe 1

Pohyb po kružnici je zvláštnym prípadom krivočiareho pohybu. Všetky body trajektórie sú v tomto prípade rovnako vzdialené od jedného bodu, umiestneného v jej strede. V dynamike sa dozviete, že príčinou zakrivenia trajektórie hmotného bodu do tvaru kružnice je sila, ktorá smeruje vždy do stredu trajektórie.

Na obr. 58 je znázornená trajektória v tvare kružnice s geometrickým stredom v bode S, a polomerom *r*. Polohu hmotného bodu a rýchlosť jeho pohybu po kružnici budeme určovať vzhľadom na bod S. Orientované úsečky $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{r}'$ sú polohové vektory bodov A, B, ktorými hmotný bod prechádza v čase *t* a $t + \Delta t$. Majú rovnakú veľkosť $|\boldsymbol{r}| = |\boldsymbol{r}'| = r$.

Rýchlosti $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{v}'$ sú kolmé na polomer a majú v bodoch A, B rovnakú veľkosť $|\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{v}'| = v$. Platia známe vzťahy

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}, \qquad v = \frac{s - s_0}{t} .$$



Obr. 58 Určenie polohy hmotného bodu pri pohybe po kružnici

Ak chceme zdôrazniť, že rýchlosť pohybu súvisí s pohybom po kružnici, používame názov **obvodová rýchlosť**.

Úloha 2
Vypočítajte veľkosť rýchlosti bodov na obvode kolesa bicykla s priemerom 70 cm, keď čas jednej otáčky kolesa je 0,8 s a bicykel sa pohybuje rovnomerne. [19,8 m.s^{-1}]

Poznámka 1

Okamžitá poloha bodu na kružnici vzhľadom na bod S, je úplne určená aj v súradnicovej sústave v ktorej priradíme každému bodu dve súradnice - veľkosť r polohového vektora $\boldsymbol{r}$ a uhol φ, ktorý tento vektor zviera s nehybnou polpriamkou p. Napríklad bod A na obr. 58 má súradnice A[r, φ_0]. Sú to **polárne súradnice**.

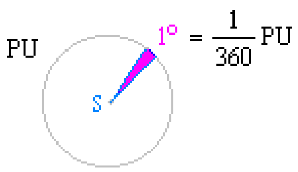
Veľkosť rovinného uhla môžeme vyjadriť v dvoch rôznych jednotkách.

1. Jednotka uhla v *stupňovej miere*

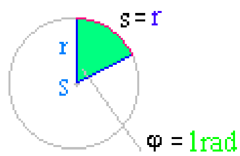
   uhlový stupeň ($^\circ$) je definovaný ako $\frac{1}{360}$ - tina plného uhla PU (obr. 59).

2. Jednotka uhla v *oblúkovej miere*

   radián (rad) je definovaný ako stredový uhol, ktorému na obvode kružnice prislúcha kruhový oblúk o dĺžke r jej polomera (obr. 60). Radián patrí medzi odvodené jednotky SI.



Obr. 59 Jednotka uhla v stupňovej miere



Obr. 60 Jednotka uhla v oblúkovej miere

Plnému uhlu PU zodpovedá oblúk s dĺžkou $2\pi r$, preto je $360^\circ = 2\pi$ rad. Ľubovoľnej dĺžke s oblúka na obvode kružnice s polomerom r zodpovedá stredový uhol

$$\varphi = \frac{s}{r} \qquad [\,\varphi\,] = \mathrm{rad}$$

Na opis pohybu hmotného bodu po kružnici zavádzame vektorovú fyzikálnu veličinu, ktorá súvisí so zmenou orientovaného uhla φ opísaného polohovým vektorom a nazýva sa **uhlová rýchlosť.**

Veľkosť uhlovej rýchlosti rovnomerného pohybu po kružnici je daná vzťahom

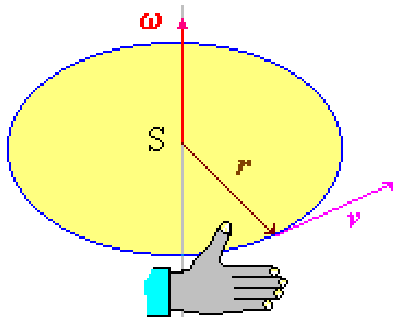
$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi - \varphi_0}{t}, \qquad [\,\omega\,] = \mathrm{rad.s^{-1}}$$

Uhlová rýchlosť číselne udáva veľkosť uhla opísaného polohovým vektorom hmotného bodu za časovú jednotku.

Poznámka 2

Obrazom uhlovej rýchlosti $\boldsymbol{\omega}$ ako vektorovej veličiny je orientovaná úsečka, ktorú umiestňujeme kolmo na rovinu kružnice, do jej stredu S. Dohodnutý smer uhlovej rýchlosti je určený **pravidlom pravej ruky** podľa obr. 61.

Ak prsty pravej ruky ukazujú smer okamžitej rýchlosti, vztýčený palec ukazuje smer vektora $\boldsymbol{\omega}$.



Obr. 61 Určenie smeru uhlovej rýchlosti pravidlom pravej ruky

Úloha 2

Určte smer vektora uhlovej rýchlosti , ak sa smer rýchlosti na obr. 61 zmení na opačný.

Pri rovnomernom pohybe po kružnici sa veľkosť ani smer uhlovej rýchlosti nemení.

Úloha 3

Zistite, akej hodnote v radiánoch zodpovedajú uhly 180°, 90°, 45°, 15°.

Úloha 4
Dokážte, že uhlol φ vyjadrený v uhlových stupňoch, môžeme prepočítať na uhol v radiánoch, alebo naopak, uhol v radiánoch môžeme prepočítať na hodnotu uhla v stupňoch pomocou týchto vzťahov

$$\varphi \text{ rad} = \varphi \frac{180^0}{\pi} \qquad\qquad \varphi^0 = \varphi \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

Príklad 1

Nájdite pre rovnomerný pohyb po kružnici vzťah, ktorý vyjadruje závisloť veľkosti uhla φ, opísaného polohovým vektorom, od času.

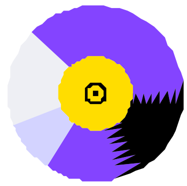
Riešenie: Zo vzťahu pre veľkosť uhlovej rýchlosti vyjadríme uhol φ vzťahom

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t$$

Je to lineárna funkcia, podobne, ako vzťah $s = s_0 + vt$ pre dráhu rovnomerného pohybu.

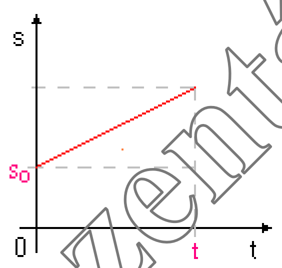
V prírode sa s rovnomerným pohybom po kružnici, podobne, ako s rovnomerným priamočiarym pohybom, nestretávame. Pohyb planét slnečnej sústavy okolo Slnka, ale aj pohyb iných objektov, sa k nemu do istej miery približuje. Veľký význam má tento druh pohybu v technickej praxi.

Všimli ste si ako sa zvuk nepríjemne mení, keď sa otáčanie kotúča zle udržiavaného gramofónu či magnetofónu nepravidelne spomaľuje, alebo zrýchľuje ? Aby hudba, spev, či hovorené slovo, reprodukované napr. pomocou gramofónu, zneli rovnako ako pri nahrávaní, otáčavý pohyb gramoplatne musí byť rovnomerný.

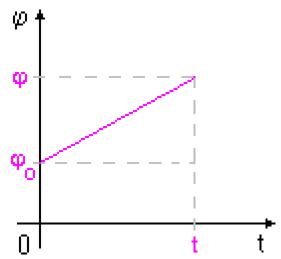


Reprodukovanie hudby z gramofónových platní je v súčasnosti stále zriedkavejšie. Znečistenie a prach v drážkach na povrchu platne spôsobujú, že prehrávanie záznamu je rušené šumom a praskotom. Častejšie prehrávame záznam z magnetickej pásky magnetofónom, alebo prehrávačom z tzv. kompaktného disku (CD).

Úloha 5
Napíšte vzťahy pre rovnomerný pohyb po kružnici, ktoré sú graficky znázornené na obr. 62 a na obr. 63.



Obr. 62 Závislosť dráhy od času



Obr. 63 Závislosť uhla od času

Úloha 6
Načrtnite grafy závislosti $s = s(t)$ a $\varphi = \varphi(t)$ pre $s_0 = 0$ a pre $\varphi_0 = 0$.

Javy, ktoré sa po uplynutí rovnakého času (periodicky) opakujú, sú **periodické javy**. Rovnomerný pohyb hmotného bodu po kružnici je **periodický pohyb**. Čas T, za ktorý polohový vektor hmotného bodu opíše plný uhol 2π a hmotný bod prejde po kružnici dráhu $2\pi r$, sa nazýva **perióda,** alebo **obežná doba**.

Počet periód, alebo počet obehov po kružnici za časovú jednotku určuje fyzikálna veličina **frekvencia**. Definujeme ju vzťahom

$$f = \frac{1}{T} \qquad\qquad [f] = \frac{1}{s} = \text{Hz (hertz)}$$

Úloha 7
Určte hodnoty frekvencie, keď perióda rovnomerného pohybu po kružnici je 1 s, 2 s, 0,1 s, 0,005 s. [1Hz, 0,5 Hz, 10 Hz, 200 Hz]

Úloha 8
Vypočítajte hodnoty periódy pre frekvencie 1 Hz, 50 Hz, 1 kHz. [1 s, 0,02 Hz, 0,001 Hz]

Príklad 2
Pre **rovnomerný pohyb po kružnici** nájdite vzťahy
a) medzi veľkosťami obvodovej a uhlovej rýchlosti,
b) medzi veľkosťou obvodovej rýchlosti, alebo uhlovej rýchlosti a periódou alebo frekvenciou.

Riešenie:

a) Vzťah medzi uhlom $\Delta\varphi$ v radiánoch, opísaný polohovým vektorom za čas Δt, a zodpovedajúcou dráhou Δs na kružnici s polomerom r, zapíšeme v tvare

$$\Delta s = r\,\Delta\varphi$$

Po vydelení tohoto vzťahu časom Δt dostávame výraz $\frac{\Delta s}{\Delta t} = r\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$, z ktorého vyplýva **vzťah medzi veľkosťou obvodovej rýchlosti a uhlovej rýchlosti**

$$v = r\,\omega$$

b) Vo vzťahoch pre veľkosť rýchlosti a uhlovej rýchlosti zvolíme čas $\Delta t = T$, pre ktorý je $\Delta s = 2\pi r$, a uhol v radiánoch je $\Delta\varphi = 2\pi$. Po dosadení získame

vzťah medzi veľkosťou obvodovej rýchlosti a periódou, alebo frekvenciou

$$v = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi r\, f$$

a **vzťah medzi veľkosťou uhlovej rýchlosti a periódou, alebo frekvenciou**

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

Úloha 8
Vypočítajte približnú hodnotu rýchlosti a uhlovej rýchlosti bodov na zemskom rovníku, keď priemerná hodnota polomera Zeme je asi 6378 km. [1670 $km.h^{-1}$, 0,042 $rad.s^{-1}$]

Úloha 9
Prepínač elektrickej brúsky má dve polohy, pri ktorých sú uvedené údaje: 7500 $ot.min^{-1}$ a 10 000 $ot.min^{-1}$. Akú frekvenciu brúsneho kotúča môžeme prepínačom zvoliť ? [125 Hz, 166,7 Hz]

Úloha 10
S akou rýchlosťou a uhlovou rýchlosťou sa otáča brúsny kotúč z predchádzajúcej úlohy, ak jeho polomer je 15 cm ? [117,8 $m.s^{-1}$, 157 $m.s^{-1}$; 785,4 $rad.s^{-1}$, 1047 $rad.s^{-1}$]

Otázky a úlohy

1. Ktorá podmienka je splnená, keď *je pohyb po kružnici* rovnomerný?
2. Vzhľadom na ktorý vzťažný bod určujeme *rýchlosť pohybu po kružnici*?
3. Napíšte vzťahy pre určenie *veľkosti rýchlosti rovnomerného pohybu po kružnici*.
4. Aký je *vzťah medzi jednotkami rovinného uhla* - uhlovým stupňom a radiánom?
5. Prepočítajte hodnoty uhlov 40°, 135°, 270°, 360° na hodnoty v radiánoch.
6. Prepočítajte hodnoty uhlov 1 rad, $\frac{\pi}{4}$ rad, $\frac{2\pi}{3}$ rad na hodnoty v stupňoch .
7. Ktorým vzťahom je daná *veľkosť uhlovej rýchlosti* rovnomerného pohybu po kružnici a akú má jednotku?
8. Vypočítajte veľkosť uhlovej rýchlosti bodu, ktorý polovicu svojej dráhy po obvode kolesa prešiel za čas 0,1 s. Načrtnite graf závislosti $\varphi = \varphi(t)$ pre pohyb so stálou veľkosťou uhlovej rýchlosti..
9. Vysvetlite pojmy *perióda, frekvencia* a určte ich jednotku.
10. Odvoďte *vzťah medzi rýchlosťou a uhlovou rýchlosťou* pohybu po kružnici.
11. Vyjadrite *závislosť rýchlosti a uhlovej rýchlosti* od a) periódy, b) frekvencie pohybu po kružnici.