

Projekt KEGA

Vyučovanie fyziky programovaním modelov fyzikálnych javov
a pomocou interaktívneho softvéru

Millikanov pokus



Alexander Tomori
Jakub Dubás
Slavomír Tuleja

Humenné 2005

Autori: Alexander Tomori

Jakub Dubás

Editor: RNDr. Slavomír Tuleja, PhD.

Preprint 2005 (L^AT_EXverzia)

Moderné informačno-komunikačné technológie a status preprintu tejto publikácie nám dovoľuje obrátiť sa s prosbou na našich kolegov, spolupracovníkov v oblasti didaktiky fyziky a nielen v nej o zaslanie svojich komentárov a názorov, resp. upozornení na zistené chyby a nedostatky.

Na základe tejto širšej spätnej väzby bude možné v časovom horizonte jeden rok a za nižších nákladov pripraviť, resp. rozšíriť tento preprint do akceptovateľnejšej a kvalitnejšej formy a obsahu v porovnaní so štandardným publikovaním. Informácie o presnom dátume prvého vydania žiadajte na emailovej adrese <stuleja@gmail.com>.

Gymnázium arm. gen. L. Svobodu

Humenné

© Alexander Tomori, Jakub Dubás, Slavomír Tuleja, 2005

Táto publikácia vznikla s príspevom grantovej agentúry MŠ SR KEGA v rámci projektov 3/3005/05 *Vyučovanie fyziky programovaním modelov fyzikálnych javov a pomocou interaktívneho softvéru.*

Všetky práva vyhradené. Žiadna časť tohto dokumentu nemôže byť žiadnym médiom reprodukována a prenášaná bez písomného súhlasu autorov. Autor bezplatne poskytne písomné dovoľenie vyhotoviť alebo distribuovať doslovný opis tohto dokumentu alebo jeho časti akýmkoľvek médiom za predpokladu, že bude zachované oznámenie o coryrighte a oznámenie o povolení a že distribútor príjemcovi poskytne povolenie na ďalšie šírenie, a to v rovnakej podobe, v akej ho dostane od autora.

Obsah

1	Úvod	1
2	Millikanov pokus	3
2.1	História merania elementárneho náboja	3
2.2	Usporiadanie pokusu	5
3	Matematický popis pohybu kvapiek	7
3.1	Rozbor síl pôsobiacich na nabitú kvapôčku	7
3.2	Brownov pohyb	10
4	Počítačový model Millikanovho pokusu	14
4.1	Java applet Millikanov pokus	14
4.2	Spôsob simulácie	15
5	Meranie náboja kvapôčky na applete	17
5.1	Postup merania	17
5.2	Experimentálne výsledky a ich vyhodnotenie	18
6	Záver	22
	Literatúra	23
	Zoznam príloh	25

Kapitola 1

Úvod

V roku 1913 odmeral Robert Millikan veľkosť elementárneho náboja. Tým vošiel do dejín fyziky. Mnohí fyzici dnes považujú jeho experiment za jeden z najkrajších experimentov vo fyzike, čo dokazuje anketa, ktorú medzi fyzikmi vykonal historik Robert P. Crease zo State University of New York at Stony Brook. V ankete sa Millikanov pokus umiestnil v prvej desiatke na treťom mieste [1]. Na určenie elementárneho náboja totiž Millikan použil len kondenzátor, vodiče, mikroskop, hodinársky olej, stopky, zdroj svetla a zdroj röntgenového žiarenia, teda aparatúru za zopár stovák dolárov. Žiadne miliardový urýchľovač ani nič podobné! Ako je možné, že niekto dokázal odmerať vlastnosť čohosi takého malého ako elektrón tak jednoducho?

Táto práca vznikla z našej túžby pocítiť na vlastnej koži čo znamená merať elementárny náboj. Rozhodli sme sa napodobniť Millikanovo meranie. Konkrétne to znamená, že sme si za cieľ dali:

1. Zistiť čo najviac informácií o reálnom Millikanovom experimente.
2. Matematicky popísať pohyb olejových kvapôčok použitých v experimente.
3. Zostaviť počítačový model vo forme Java appletu, ktorý by simuloval pohyb nabitých olejových kvapôčok v kondenzátore a umožnil by nám urobiť Millikanov pokus aspoň virtuálne.
4. Odmerať na počítačovom modeli elementárny náboj.

Podľa týchto cieľov je volená aj štruktúra práce. V druhej kapitole, *Millikanov pokus*, popisujeme históriu merania elementárneho náboja, experimentálnu zostavu použitú pri pokuse a tiež naznačujeme spôsob merania elementárneho náboja.

Tretia kapitola, *Matematický popis pohybu kvapiek*, sa zaoberá rozborom síl pôsobiacich na nabitú kvapôčku vo vzduchu. Sú v nej odvodené vzťahy, ktoré sú potrebné pre určenie náboja kvapky z údajov nameraných v experimente. Zaoberá sa tiež teoretickým rozborom Brownovho pohybu, ktorý vykonávajú olejové kvapky vo vzduchu. Výsledky tohto rozboru sme potom využili pri počítačovej simulácii experimentu.

V štvrtej kapitole, *Počítačový model Millikanovho pokusu*, popisujeme funkcie a ovládanie nami vytvoreného Java appletu, umožňujúceho virtuálne meranie elementárneho náboja. Okrem toho tam uvádzame niektoré detaily simulácie pohybu olejových kvapôčok.

Piata kapitola, *Meranie náboja kvapôčky na applete*, je vyvrcholením práce. Uvádzame v nej laboratórny záznam z merania elementárneho náboja na našom applete. Detailne popisujeme postup merania ako aj postup spracovania a vyhodnotenia nameraných údajov.

Vedľajším produktom našej práce je webová stránka s počítačovým modelom Millikanovho pokusu obsahujúca návod na meranie elementárneho náboja a pokyny pre prácu s počítačovým modelom. Vďaka nej budú môcť naši spolužiaci uskutočniť tento experiment v teple domova a aspoň trochu sa vžiť do pocitov Roberta Millikana, keď už mal takmer všetky údaje potrebné na ďalšie matematické spracovanie o určitej olejovej kvapôčke namerané a tá mu zrazu jednoducho zmizla zo zorného poľa mikroskopu a už sa nevrátila.

Sami by sme si s touto prácou určite neporadili, a preto sa chceme poďakovať RNDr. Slavomírovi Tulejovi, učiteľovi fyziky a matematiky, za to že nás „nechával poškole” a venoval nám svoj čas, aby nám celú problematiku objasnil.

Kapitola 2

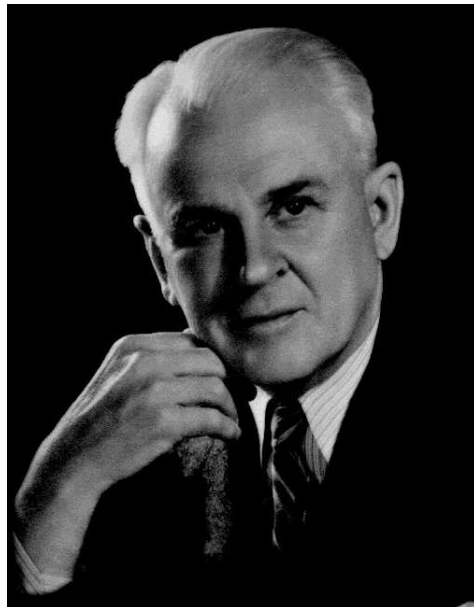
Millikanov pokus

2.1 História merania elementárneho náboja

Bezprostredne po tom, čo J. J. Thomson v roku 1897 objavil elektrón, sa jeho žiaci a spolupracovníci pokúšali určiť jeho náboj [2]. C. T. R. Wilson študoval jav pozorovaný Helmholtzom už v roku 1887, ktorý spočíva v kondenzácii presýtenej vodnej pary na nabitých časticiach. J. S. E. Townsend využil túto metódu a elektrometrom zmeral celkový náboj obláčiku hmly, v ktorom stanovil počet kvapiek. Za predpokladu, že každá kvapka vznikla na jednom elementárnom náboji, odhadol jeho veľkosť na rádovo 10^{-19} C. Túto metódu J. J. Thomson a H. A. Wilson stále zdokonaľovali. Predovšetkým určili postup, ako z rýchlosti v_0 padania kvapiek vo vzduchu určiť ich polomer a teda aj hmotnosť. Konečne C. T. R. Wilson vypracoval postup, ako riadením expanzie vodných pár zaistiť ich kondenzáciu len na záporne nabitých časticiach. Touto metódou bola pre náboj elektrónu získaná hodnota $1,1 \cdot 10^{-19}$ C.

S prehĺbovaním znalostí o štruktúre atómu vzrastal význam pojmu elementárneho náboja a teda aj význam náboja elektrónu ako univerzálnej fyzikálnej konštanty a bola naliehavo pociťovaná potreba poznať jeho hodnotu čo najpresnejšie. Túto úlohu splnil americký fyzik R. A. Millikan (Obr. 2.1). Takisto použil princíp štúdia pohybu nabitých kvapiek v elektrickom a gravitačnom poli. Dôkladnou analýzou danej problematiky našiel v postupoch svojich predchodcov zdroje rôznych chýb a systematicky ich odstraňoval:

namiesto vodných kvapiek, ktoré sa v priebehu merania odparujú, použil kvapky hodinárskeho oleja, prešiel na sledovanie pohybu jedinej kvapky pomocou mikroskopu, stabilizoval teplotu meracej komory, pretože od teploty závisí viskozita vzduchu, zaviedol korekciu na vztlak a meraním pri rôznych tlakoch eliminoval odchýlky od Stokesovho vzorca. V roku 1913 publikoval získanú hodnotu $e = (1,591 \pm 0,003) \cdot 10^{-19} \text{ C}$. V rokoch 1936-1940 boli prevedené presné merania viskozity vzduchu. Výsledky ukázali, že hodnota ktorú mal Millikan k dispozícii, nie je celkom presná. Po prevedení príslušnej korekcie dáva Millikanovo meranie výsledok $e = 1,603 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.



Obrázok 2.1: Americký fyzik Robert Andrews Millikan (1868–1953).

Millikanova práca je klasickým príkladom dôkladne prevedeného experimentu, ktorý zohral dôležitú rolu pri rozvoji atómovej fyziky; v roku 1923 bol odmenený Nobelovou cenou za fyziku. Inú, presnejšiu priamu metódu pre meranie elementárneho náboja sa nepodarilo nájsť. Súčasne používané presnejšie hodnoty sú získavané nepriamymi metódami, keď sa štatisticky súčasne spracovávajú výsledky meraní príbuzných veličín rôznymi metódami. V tomto procese tzv. adjustácie sú potom určené najpresnejšie hodnoty jednotlivých veličín. Súčasne používaná hodnota elementárneho náboja je:

boje olejových kvapôčiek sa menia. Okrem toho bol v pôvodnom usporiadaní aj prístroj na udržiavanie konštantnej teploty. V zornom poli mikroskopu boli v určitej vzdialenosti od seba rovnobežne umiestnené dva vodorovné tenké vodiče, aby bolo možné odmerať čas, za ktorý kvapka prejde danú vzdialenosť a tým aj jej rýchlosť.

Keď je napätie zapnuté, kvapôčka sa medzi platňami kondenzátora nachádza v homogénnom elektrickom poli. Zmenou polarity a prípadne aj veľkosti napätia zdroja je možné podľa potreby zmeniť smer pohybu kvapôčky, aby sa kvapka nedotkla platne kondenzátora. Samotný pokus sa zakladá na meraní ustálenej rýchlosti olejovej kvapôčky pod vplyvom gravitačnej a tretej sily smerom dole a pod vplyvom elektrickej, tretej a gravitačnej sily smerom hore. Z nameraných rýchlostí sa dá určiť veľkosť náboja kvapôčky. Ak sa takto preskúma veľa kvapiek, je možné dokázať, že všetky nesú náboj, ktorý je celočíselným násobkom elementárneho náboja.

Kapitola 3

Matematický popis pohybu kvapiek

3.1 Rozbor síl pôsobiacich na nabitú kvapôčku

Za neprítomnosti elektrického poľa medzi doskami kondenzátora bude kvapôčka padať pod vplyvom gravitácie. Po zanedbateľne krátkom čase (rádovo 10^{-7} sekundy) sa kvapka prestane pohybovať zrýchleným pohybom a začne padať rovnomerne, konštantnou rýchlosťou. Vtedy na ňu pôsobia tri sily, ktoré sú v rovnováhe: tiažová, vztlaková a odporová, tak ako je to znázornené na Obr. 3.1 (a). Platí:

$$F_g - F_{\text{odp}} - F_{\text{vz}} = 0. \quad (3.1)$$

Pre gravitačnú silu F_g platí

$$F_g = mg = \rho_{\text{olej}} V g = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_{\text{olej}} g. \quad (3.2)$$

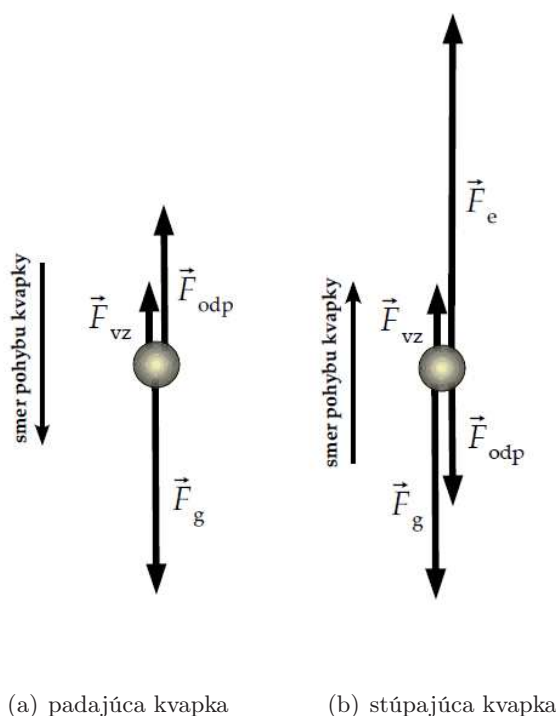
Pre odporovú silu F_{odp} platí Stokesov vzťah

$$F_{\text{odp}} = 6\pi\eta r v_{\text{kl}}, \quad (3.3)$$

kde v_{kl} je rýchlosť klesania kvapky a η je viskozita vzduchu.

Pre vztlakovú silu F_{vz} platí podľa Archimedovho zákona

$$F_{\text{vz}} = V \rho_{\text{vzd}} g = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_{\text{vzd}} g. \quad (3.4)$$



Obrázok 3.1: Sily pôsobiace na olejovú kvapôčku, ktorá (a) padá len pod vplyvom gravitácie pri vypnutom napätí na kondenzátore a (b) stúpa pod vplyvom elektrickej sily pri zapnutom napätí na kondenzátore.

Preto pre voľne padajúcu kvapku platí

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{olej} g - 6\pi\eta r v_{kl} - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{vzd} g = 0. \quad (3.5)$$

Z tejto rovnice sa dá vyjadriť polomer kvapky:

$$r = \sqrt{\frac{9\eta v_{kl}}{2g(\rho_{olej} - \rho_{vzd})}}. \quad (3.6)$$

Ak medzi doskami kondenzátora nastavíme také napätie U , ktoré kvapôčku vytiahne späť nahor, bude sa kvapôčka správať podobne ako pri páde. Bude na ňu navyše pôsobiť elektrická sila smerom nahor. Po zanedbateľne krátkom čase sa začne pohybovať rovnomerne, rýchlosťou v_{st} . Vtedy nastane rovnováha síl, znázornená na Obr. 3.1 (b):

$$F_g + F_{odp} - F_e - F_{vz} = 0. \quad (3.7)$$

Gravitačná sila F_g a vztlaková sila F_{vz} je rovnaká ako v predchádzajúcom prípade. Stokesov vzťah určuje odporovú silu F_{odp}

$$F_{odp} = 6\pi\eta r v_{st}, \quad (3.8)$$

kde v_{st} je rýchlosť stúpania kvapky.

Elektrická sila F_e je určená vzťahom

$$F_e = QE, \quad (3.9)$$

kde Q je celkový náboj na kvapke a E je intenzita homogénneho elektrického poľa vytvoreného medzi platňami kondenzátora. Pre intenzitu elektrického poľa platí

$$E = \frac{U}{d}, \quad (3.10)$$

kde U je napätie medzi platňami kondenzátora a d je vzdialenosť týchto dvoch platiní.

Preto pre kvapku stúpajúcu v elektrickom poli platí

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{olej} g + 6\pi\eta r v_{st} - Q \frac{U}{d} - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{vzd} g = 0. \quad (3.11)$$

V tejto rovnici je jedinou neznámou náboj kvapky Q , pretože polomer kvapky r už vieme určiť z rovnice (3.6). Po vyjadrení veľkosti náboja Q na olejovej kvapôčke dostaneme

$$Q = \frac{d}{U} \left[\frac{4}{3}\pi r^3 g (\rho_{olej} - \rho_{vzd}) + 6\pi\eta r v_{st} \right]. \quad (3.12)$$

Potrebné konštanty

- Viskozita vzduchu: $\eta = 7,25 \cdot 10^{-6} \text{ N}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-2}$
- Hustota oleja: $\rho_{olej} = 875,3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$
- Hustota vzduchu: $\rho_{vzd} = 1,3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$
- Vzdialenosť medzi doskami kondenzátora: $d = 6 \text{ mm}$
- Tiažové zrýchlenie: $g = 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$

3.2 Brownov pohyb

Doteraz sme nebrali do úvahy fakt, že na dostatočne malú makroskopickú časticu ponorenú v kvapalnom alebo plynnom prostredí náhodne narážajú okolité molekuly prostredia, v dôsledku čoho častica vykonáva Brownov pohyb¹. To platí aj pre olejové kvapôčky v Millikanovom pokuse a teda aj pre tie v našom applete.

Predpokladajme na chvíľu, že na kvapku nepôsobia žiadne vonkajšie sily (gravitačná, elektrická) a že sa smie pohybovať len v smere vodorovnej osi x . V čase $t = 0$ nech sa nachádza v polohe $x = 0$. Zaujímá nás, kde sa častica bude nachádzať v čase t .

Pohyb kvapky je určený pôsobením okolitých častíc vzduchu, ktoré na ňu nepravidelne narážajú z oboch strán. Pôsobenie častíc môžeme reprezentovať istou rýchlo sa meniacou silou $F(t)$, ktorej hodnota môže byť aj kladná aj záporná a prudko fluktuuje. Matematický popis dôsledkov pôsobenia tejto sily je v skutočnosti dosť komplikovaný. Kvapka bude vykonávať Brownov pohyb, pri ktorom sa chvíľu pohybuje v kladnom smere osi x , chvíľu v jej zápornom smere.

Uchýlime sa k zjednodušeniu a nahradíme Brownov pohyb kvapky tzv. *náhodným kráčaním*. Náhodné krácanie je pohyb, pri ktorom sa kvapka vždy po rovnakom čase Δt (tzv. kroku) posunie buď v kladnom alebo v zápornom smere osi x o rovnako dlhý krok s dĺžkou s . Smer posunutia v jednotlivých krokoch je úplne náhodný a smer posunutia v n -tom kroku nezávisí od smeru posunutia v $(n - 1)$ -vom kroku.

Preformulujme teda našu pôvodnú otázku na otázku: Kde sa bude nachádzať kvapka po n krokoch náhodného kráčania? Na túto otázku sa nedá jednoznačne odpovedať, pretože pohyb kvapky je náhodný. Vieme určiť len

¹Medzi fyzikmi ani medzi laikmi nie je príliš známym fakt, že Brownov pohyb v roku 1905 prvý krát matematicky popísal a vysvetlil Albert Einstein. Z piatich článkov, ktoré Einstein publikoval v „zázračnom roku 1905“ je tento článok najviac citovaný [4]. Položil základy pre experimentálnu prácu Jeana Perrina, ktorý o tri roky neskôr dokázal štúdiom Brownovho pohybu reálnosť atómovej hypotézy a stanovil experimentálne hodnotu Boltzmannovej konštanty. Po sto rokoch od zázračného roku 1905 oslavuje medzinárodná komunita rok 2005 ako medzinárodný rok fyziky. Pripomíname si v ňom priekopnícke Einsteinove práce z roku 1905.

pravdepodobnosti toho, že kvapka sa bude po n krokoch nachádzať v nejakej konkrétnej polohe.² V štatistickej fyzike sa takýto typ problémov rieši zavedením tzv. *štatistického súboru*. Predstavme si, že máme veľmi veľký počet identických kondenzátorov, pričom v každom je jedna kvapka. Všetky kvapky nech sa nachádzajú v identickom začiatočnom stave, teda platí pre ne, že v čase $t = 0$ sa nachádza každá v polohe $x = 0$. Necháme teraz všetky kvapky náhodne kráčať. Pohyby kvapiiek budú rôzne. Po n krokoch sa budú nachádzať v rôznych polohách voči počiatku $x = 0$.

Namiesto popisu jednej konkrétnej kvapky sa v štatistickej fyzike sústreďujeme na popis celého štatistického súboru. Našu otázku ohľadom toho, kde sa po n krokoch nachádza kvapka, musíme teda znovu preformulovať, tentoraz na otázku: Aká je stredná hodnota polôh kvapiiek $\langle x_n \rangle$ po n krokoch vzhľadom na štatistický súbor?

Je zrejmé, že na začiatku, v čase $t = 0$ je $\langle x_0 \rangle = 0$, lebo všetky kvapky sa nachádzajú v počiatku osi x . Po jednom kroku sa v štatistickom súbore zhruba polovica kvapiiek posunie doľava do polohy $x = -s$ a druhá polovica do doprava do polohy $x = s$, keďže posunutie v oboch smeroch je rovnako pravdepodobné. Preto stredná poloha kvapiiek po jednom kroku zostane naďalej $\langle x_1 \rangle = 0$.

Predpokladajme teraz, že po k krokoch bude stredná poloha kvapiiek $\langle x_k \rangle$. Necháme kvapky urobiť ďalší krok, pri ktorom sa zhruba polovica z nich posunie o posunutie $p = -s$ a zvyšná polovica o posunutie $p = s$. Nová poloha každej kvapky sa získa zo starej polohy pripočítaním náhodného posunutia p . Bude platiť

$$\langle x_{k+1} \rangle = \langle x_k + p \rangle = \langle x_k \rangle + \langle p \rangle = \langle x_k \rangle + 0 = \langle x_k \rangle. \quad (3.13)$$

Keďže zhruba polovica kvapiiek sa posunula doľava a zhruba polovica

²Dá sa ľahko ukázať [5], že pravdepodobnosť toho, že kvapka z celkového počtu n krokov urobí k krokov doprava a bude v polohe $x = ks - (n - k)s = (2k - n)s$, je

$$P(n, k) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}.$$

Toto je známe binomické rozdelenie. Ak je n veľké, možno binomické rozdelenie nahradiť spojitým normálnym rozdelením, čo sme využili v našom applete pri simulácii Brownovho pohybu.

doprava, mohli sme predpokladať, že $\langle p \rangle = 0$. Takže stredná poloha kvapiiek po $k + 1$ krokoch bude rovnaká ako po k krokoch. Je vidieť, že žiaden krok neovplyvní strednú polohu kvapiiek a tá vždy zostane

$$\langle x_n \rangle = 0. \quad (3.14)$$

Vyzerá to tak, že stredná poloha kvapiiek nepopisuje dobre to, ako ďaleko sa kvapka po n krokoch dostane od počiatku, keďže je vždy nulová. Vhodnejšou veličinou, ktorá popisuje rozptyl polôh kvapiiek je veličina $\langle x_n^2 \rangle$, teda stredná hodnota druhej mocniny polôh kvapiiek po n krokoch. Či je poloha kvapky kladná alebo záporná, bude druhá mocnina polohy kvapky vždy nezáporná. Predstavuje teda vhodnú mieru vzdialenosti kvapky od počiatku.

Zistíme teraz, akú hodnotu nadobúda $\langle x_n^2 \rangle$. Na začiatku, keď sú všetky kvapky v počiatku osi x , je zrejmé $\langle x_0^2 \rangle = 0$. Ak kvapky urobia jeden krok, bude mať druhá mocnina polohy každej kvapky hodnotu s^2 . Preto stredná hodnota bude $\langle x_1^2 \rangle = s^2$.

Predpokladajme teraz, že po k krokoch sa bude stredná hodnota druhých mocnín polôh kvapiiek rovnat' $\langle x_k^2 \rangle$. Necháme kvapky urobiť ďalší krok, pri ktorom sa znovu zhruba polovica z nich posunie o posunutie $p = -s$ a zvyšná polovica o posunutie $p = s$. Aj teraz sa nová poloha každej kvapky získa zo starej polohy pripočítaním náhodného posunutia p . Pre strednú hodnotu druhých mocnín polôh kvapiiek po $k + 1$ krokoch bude platiť

$$\langle x_{k+1}^2 \rangle = \langle (x_k + p)^2 \rangle = \langle x_k^2 + 2x_k p + p^2 \rangle = \langle x_k^2 \rangle + \langle 2x_k p \rangle + \langle p^2 \rangle. \quad (3.15)$$

Keďže poloha x_k a posunutie p kvapky sú nezávislé náhodné veličiny, bude prostredný člen $\langle 2x_k p \rangle$ na pravej strane rovnice (3.15) možné upraviť na

$$\langle 2x_k p \rangle = 2\langle x_k \rangle \langle p \rangle = 2 \cdot 0 \cdot 0 = 0. \quad (3.16)$$

Takto rovnica (3.15) nadobudne tvar

$$\langle x_{k+1}^2 \rangle = \langle x_k^2 \rangle + \langle p^2 \rangle = \langle x_k^2 \rangle + s^2. \quad (3.17)$$

Vidíme, že pri každom kroku sa $\langle x_k^2 \rangle$ zvýši o s^2 . To nás privádza k záveru

$$\langle x_n^2 \rangle = ns^2. \quad (3.18)$$

Keďže každý krok trvá rovnakú dobu Δt , bude počet krokov n úmerný času t pohybu kvapky. To isté možno povedať aj o strednej hodnote druhej mocniny polohy kvapky v čase t

$$\langle x^2 \rangle = \alpha t, \quad (3.19)$$

pričom α je konštanta, ktorá bude závisieť od teploty vzduchu, viskozity vzduchu a veľkosti kvapky.

Podrobnejší nezjednodušený matematický rozbor pohybu kvapky [6, 7] vedie ku konkrétnej hodnote konštanty α . Vzťah (3.19) sa dá zapísať ako

$$\langle x^2 \rangle = \frac{2k_B T}{6\pi\eta r} t, \quad (3.20)$$

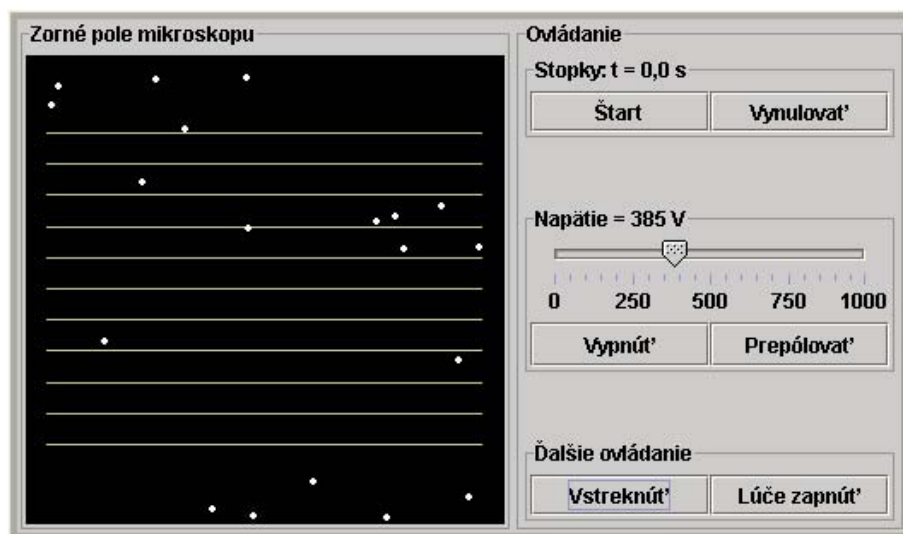
kde k_B je Boltzmannova konštanta, T je termodynamická teplota vzduchu a η je viskozita vzduchu.

Doteraz sme predpokladali, že na kvapku nepôsobia vonkajšie sily (gravitačná, elektrická). Ak by na kvapku pôsobili vonkajšie sily, mohli by sme si jej pohyb predstaviť ako *zložený* pohyb skladajúci sa z hladkého pohybu spôsobeného *len* vonkajšími silami a Brownovho pohybu, pri ktorom zanedbávame pôsobenie vonkajších síl.

Kapitola 4

Počítačový model Millikanovho pokusu

4.1 Java applet Millikanov pokus



Obrázok 4.1: Java applet simulujúci Millikanov pokus.

Na Obr. 4.1 je Java applet so simuláciou Millikanovho pokusu, ktorý sme naprogramovali ako súčasť našej práce. V pravej časti appletu sa nachádza ovládací panel. V jeho hornej časti sú stopky, ktorými je potrebné merať v

tomto pokuse čas. V jeho strednej časti je možné nastaviť, zapnúť, vypnúť a prepólovať elektrické napätie medzi doskami kondenzátora. Dole sa nachádza tlačidlo VSTREKNÚŤ, ktorým do priestoru medzi doskami vstreknete nové kvapky. Tiež je tam tlačidlo LÚČE ZAPNÚŤ, ktorým je možné spustiť zdroj ionizujúceho žiarenia, ktorý ionizuje vzduch v kondenzátore. Ak kvapôčka stretne ionizovanú molekulu vzduchu, zmení svoj elektrický náboj.

Na internete sme ešte predtým, ako sme sa rozhodli vytvoriť tento applet našli dva applety simulujúce Millikanov pokus, ktoré nám boli inšpiráciou [8, 9]. Avšak ani jeden z nich nesimuloval u kvapky náhodný Brownov pohyb. Naš applet s týmto pohybom počíta a to našu simuláciu približuje viac k realite.

4.2 Spôsob simulácie

V našom applete sme pohyb kvapiek simulovali tak, že sme pri každom animačnom časovom kroku dt kvapku najprv posunuli zodpovedajúco jej rýchlosti v , pričom sme ignorovali Brownov pohyb. Potom sme k novej polohe kvapky pripočítali náhodné posunutie, zodpovedajúce Brownovmu pohybu za čas dt . Toto sme opakovali pre každú kvapku pri každom animačnom kroku.

Náhodné posunutia kvapôčky v jednotlivých časových krokoch spôsobené Brownovým pohybom sme generovali pomocou polárnej formy Box-Mullerovej transformácie [10], ktorá transformuje rovnomerne rozdelené náhodné čísla, generované na počítači pomocou metódy `Math.random()`, na náhodné čísla z normálneho rozdelenia $N(0, \langle x^2 \rangle)$, kde $\langle x^2 \rangle$ je stredná hodnota druhej mocniny výsledného posunutia kvapky v smere osi x za dobu trvania jedného časového kroku simulácie daná rovnicou (3.20).

Uvádzame tu zdrojový kód metódy v jazyku Java, ktorá k polohe kvapky pripočíta náhodné posunutie z normálneho rozdelenia $N(0, \langle x^2 \rangle)$ zodpovedajúce Brownovmu pohybu.

```
private void generateRandomCorrection(int i, double dt){
    double meanDisplacementSquared = 2*kB*Temp/alpha[i]*dt;
    double x1, x2, w;
```

```
do{
    x1=2.0*Math.random()-1.0;
    x2=2.0*Math.random()-1.0;
    w=x1*x1+x2*x2;
}
while (w>=1.0);

w=Math.sqrt(meanDisplacementSquared) *
    Math.sqrt((-2.0*Math.log(w))/w);
x[i]+=x1*w;
y[i]+=x2*w;
}
```

Pri programovaní nášho Java appletu sme použili voľne dostupný balík tried *Open Source Physics* [11], ktorý nám uľahčil grafické zobrazenie kvapiek a ich animáciu.

Kapitola 5

Meranie náboja kvapôčky na applete

5.1 Postup merania

Na applete sme si vybrali nejakú kvapôčku a pomocou ovládacích prvkov pre napätie sme ju presunuli do dolnej časti zorného poľa mikroskopu. (Mikroskop prevracia obraz, teda kvapku sme v skutočnosti posúvali nahor.) Vypli sme napätie a kvapku sme nechali padať. Na stopkách v pravej hornej časti appletu sme odmerali čas t_{kl} , za ktorý prešla medzi spodnou a hornou vodorovnou čiarkou v zornom poli mikroskopu, ktorých vzdialenosť je h .

Hneď ako kvapka prešla hornou čiarkou sme vypli a vynulovali stopky a čo najskôr sme zapli napätie, vďaka ktorému sa kvapka otočila a dala do pohybu opačným smerom. Keď prešla hornou vodorovnou čiarkou, zapli sme znovu stopky a odmerali čas t_{st} , za ktorý kvapka došla k spodnej čiarkke.

Znovu sme vynulovali stopky a vypli napätie, čím sa kvapka opätovne otočila. S jednou kvapkou sme toto zopakovali 10 krát, aby sme dokázali čo najviac redukovať náhodný vplyv Brovnovho pohybu na časy t_{kl} a t_{st} .

Pre každú dvojicu časov t_{kl} a t_{st} sme určili náboj kvapky Q . Robili sme to tak, že sme vypočítali rýchlosť $v_{kl} = h/t_{kl}$ a z nej sme pomocou vzťahu (3.6) určili polomer kvapky. Potom sme z času t_{st} vypočítali rýchlosť stúpania $v_{st} = h/t_{st}$. Nakoniec sme využili túto rýchlosť a tiež už vypočítaný polomer kvapky a pomocou vzťahu (3.12) sme vypočítali náboj kvapky.

Z nameraných desiatich hodnôt náboja určitej kvapôčky sme určili aritmetický priemer

$$\bar{Q} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Q_i.$$

Potom sme pre každú nameranú hodnotu náboja tejto kvapky určili druhú mocninu odchýlky od aritmetického priemeru náboja. Tieto druhé mocniny sme sčítali a určili sme strednú kvadratickú odchýlku aritmetického priemeru ΔQ pomocou vzťahu

$$\Delta Q = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (Q_i - \bar{Q})^2}{n(n-1)}}.$$

Podľa teórie pravdepodobnosti má pravdepodobnosť toho, že hodnota náboja leží v intervale $\langle \bar{Q} - \Delta Q, \bar{Q} + \Delta Q \rangle$ hodnotu 0,68. Zapišeme to tak, že

$$Q = \bar{Q} \pm \Delta Q.$$

Tento postup sme zopakovali pre štyri rôzne kvapky s rôznymi nábojmi.

5.2 Experimentálne výsledky a ich vyhodnotenie

Výsledky meraní na applete pre štyri skúmané kvapky sú zhrnuté v Tabuľkách 5.1, 5.2, 5.3 a 5.4. V popise ku každej tabuľke sa nachádza hodnota náboja meranej kvapky spolu s odchýlkou merania.

Tabuľka 5.5 naznačuje, že medzi nameranými nábojmi kvapiek je vzťah. Vidno z nej, že náboje druhej, tretej a štvrtej kvapky sú približne celočíselnými násobkami náboja prvej kvapky s najmenším nábojom. Z hodnôt násobkov vyplýva, že prvá kvapka nesie jeden elementárny náboj, druhá dva, tretia tri a štvrtá štyri elementárne náboje.

Hodnotu elementárneho náboja môžeme odhadnúť z náboja každej meranej kvapky tak, že nameraný náboj kvapky vydelíme počtom elementárnych nábojov na kvapke. Tým získame odhad hodnoty elementárneho náboja. Jeho odchýlku získame z odchýlky náboja danej kvapky vydelením počtom elementárnych nábojov. Odhady hodnôt elementárneho náboja z meraní nábojov našich štyroch kvapiek spolu s ich odchýlkami prehľadne znázorňuje Tabuľka 5.6.

t_{kl} (s)	t_{st} (s)	v_{kl} (m.s ⁻¹)	v_{st} (m.s ⁻¹)	r (m)	Q (C)
21,9	29,3	$4,57 \cdot 10^{-5}$	$3,41 \cdot 10^{-5}$	$4,17 \cdot 10^{-7}$	$1,61 \cdot 10^{-19}$
21,8	30,2	$4,59 \cdot 10^{-5}$	$3,31 \cdot 10^{-5}$	$4,18 \cdot 10^{-7}$	$1,59 \cdot 10^{-19}$
20,0	30,5	$5,00 \cdot 10^{-5}$	$3,28 \cdot 10^{-5}$	$4,36 \cdot 10^{-7}$	$1,74 \cdot 10^{-19}$
22,9	30,7	$4,37 \cdot 10^{-5}$	$3,26 \cdot 10^{-5}$	$4,08 \cdot 10^{-7}$	$1,50 \cdot 10^{-19}$
23,0	33,2	$4,35 \cdot 10^{-5}$	$3,01 \cdot 10^{-5}$	$4,07 \cdot 10^{-7}$	$1,44 \cdot 10^{-19}$
23,2	32,6	$4,31 \cdot 10^{-5}$	$3,07 \cdot 10^{-5}$	$4,05 \cdot 10^{-7}$	$1,44 \cdot 10^{-19}$
19,6	31,2	$5,10 \cdot 10^{-5}$	$3,21 \cdot 10^{-5}$	$4,41 \cdot 10^{-7}$	$1,77 \cdot 10^{-19}$
22,4	34,9	$4,46 \cdot 10^{-5}$	$2,87 \cdot 10^{-5}$	$4,12 \cdot 10^{-7}$	$1,46 \cdot 10^{-19}$
19,5	30,1	$5,13 \cdot 10^{-5}$	$3,32 \cdot 10^{-5}$	$4,42 \cdot 10^{-7}$	$1,80 \cdot 10^{-19}$
20,8	32,7	$4,81 \cdot 10^{-5}$	$3,06 \cdot 10^{-5}$	$4,28 \cdot 10^{-7}$	$1,62 \cdot 10^{-19}$

Tabuľka 5.1: Výsledky merania pre prvú kvapku. Stredná kvadratická chyba aritmetického priemeru ΔQ pre prvú kvapku má hodnotu $4 \cdot 10^{-21}$ C. Náboj tejto kvapky leží v intervale $(1,60 \pm 0,04) \cdot 10^{-19}$ C.

t_{kl} (s)	t_{st} (s)	v_{kl} (m.s ⁻¹)	v_{st} (m.s ⁻¹)	r (m)	Q (C)
16,3	30,1	$6,13 \cdot 10^{-5}$	$3,32 \cdot 10^{-5}$	$4,83 \cdot 10^{-7}$	$3,26 \cdot 10^{-19}$
15,3	30,7	$6,54 \cdot 10^{-5}$	$3,26 \cdot 10^{-5}$	$4,99 \cdot 10^{-7}$	$3,48 \cdot 10^{-19}$
15,7	27,3	$6,37 \cdot 10^{-5}$	$3,66 \cdot 10^{-5}$	$4,93 \cdot 10^{-7}$	$3,52 \cdot 10^{-19}$
16,4	28,0	$6,10 \cdot 10^{-5}$	$3,57 \cdot 10^{-5}$	$4,82 \cdot 10^{-7}$	$3,32 \cdot 10^{-19}$
17,1	28,0	$5,85 \cdot 10^{-5}$	$3,57 \cdot 10^{-5}$	$4,72 \cdot 10^{-7}$	$3,17 \cdot 10^{-19}$
17,2	28,8	$5,81 \cdot 10^{-5}$	$3,47 \cdot 10^{-5}$	$4,71 \cdot 10^{-7}$	$3,12 \cdot 10^{-19}$
16,3	32,6	$6,13 \cdot 10^{-5}$	$3,07 \cdot 10^{-5}$	$4,83 \cdot 10^{-7}$	$3,17 \cdot 10^{-19}$
16,8	27,6	$5,95 \cdot 10^{-5}$	$3,62 \cdot 10^{-5}$	$4,76 \cdot 10^{-7}$	$3,25 \cdot 10^{-19}$
18,1	28,8	$5,52 \cdot 10^{-5}$	$3,47 \cdot 10^{-5}$	$4,59 \cdot 10^{-7}$	$2,94 \cdot 10^{-19}$
18,0	29,3	$5,56 \cdot 10^{-5}$	$3,41 \cdot 10^{-5}$	$4,60 \cdot 10^{-7}$	$2,94 \cdot 10^{-19}$

Tabuľka 5.2: Výsledky merania pre druhú kvapku. Stredná kvadratická chyba aritmetického priemeru ΔQ pre druhú kvapku má hodnotu $6,19 \cdot 10^{-21}$ C. Náboj tejto kvapky leží v intervale $(3,22 \pm 0,06) \cdot 10^{-19}$ C.

t_{kl} (s)	t_{st} (s)	v_{kl} (m.s ⁻¹)	v_{st} (m.s ⁻¹)	r (m)	Q (C)
18,8	13,8	$5,32 \cdot 10^{-5}$	$7,25 \cdot 10^{-5}$	$4,50 \cdot 10^{-7}$	$4,64 \cdot 10^{-19}$
19,3	14,6	$5,18 \cdot 10^{-5}$	$6,85 \cdot 10^{-5}$	$4,44 \cdot 10^{-7}$	$4,38 \cdot 10^{-19}$
18,3	14,2	$5,46 \cdot 10^{-5}$	$7,04 \cdot 10^{-5}$	$4,56 \cdot 10^{-7}$	$4,68 \cdot 10^{-19}$
18,3	13,0	$5,46 \cdot 10^{-5}$	$7,69 \cdot 10^{-5}$	$4,56 \cdot 10^{-7}$	$4,92 \cdot 10^{-19}$
19,0	14,1	$5,26 \cdot 10^{-5}$	$7,09 \cdot 10^{-5}$	$4,48 \cdot 10^{-7}$	$4,54 \cdot 10^{-19}$
17,6	13,3	$5,68 \cdot 10^{-5}$	$7,52 \cdot 10^{-5}$	$4,65 \cdot 10^{-7}$	$5,04 \cdot 10^{-19}$
18,0	13,8	$5,56 \cdot 10^{-5}$	$7,25 \cdot 10^{-5}$	$4,60 \cdot 10^{-7}$	$4,83 \cdot 10^{-19}$
17,6	13,0	$5,68 \cdot 10^{-5}$	$7,69 \cdot 10^{-5}$	$4,65 \cdot 10^{-7}$	$5,10 \cdot 10^{-19}$
17,6	13,7	$5,68 \cdot 10^{-5}$	$7,30 \cdot 10^{-5}$	$4,65 \cdot 10^{-7}$	$4,95 \cdot 10^{-19}$
17,5	13,4	$5,71 \cdot 10^{-5}$	$7,46 \cdot 10^{-5}$	$4,67 \cdot 10^{-7}$	$5,04 \cdot 10^{-19}$

Tabuľka 5.3: Výsledky pre tretiu kvapku. Stredná kvadratická chyba aritmetického priemeru ΔQ pre tretiu kvapku má hodnotu $7,65 \cdot 10^{-21}$ C. Náboj tejto kvapky leží v intervale $(4,81 \pm 0,08) \cdot 10^{-19}$ C.

t_{kl} (s)	t_{st} (s)	v_{kl} (m.s ⁻¹)	v_{st} (m.s ⁻¹)	r (m)	Q (C)
9,6	9,4	$1,0 \cdot 10^{-4}$	$1,1 \cdot 10^{-4}$	$6,3 \cdot 10^{-7}$	$6,4 \cdot 10^{-19}$
10,0	9,0	$1,00 \cdot 10^{-4}$	$1,1 \cdot 10^{-4}$	$6,17 \cdot 10^{-7}$	$6,3 \cdot 10^{-19}$
9,3	8,6	$1,1 \cdot 10^{-4}$	$1,2 \cdot 10^{-4}$	$6,4 \cdot 10^{-7}$	$6,9 \cdot 10^{-19}$
9,8	8,8	$1,0 \cdot 10^{-4}$	$1,1 \cdot 10^{-4}$	$6,2 \cdot 10^{-7}$	$6,5 \cdot 10^{-19}$
9,9	8,7	$1,0 \cdot 10^{-4}$	$1,1 \cdot 10^{-4}$	$6,2 \cdot 10^{-7}$	$6,5 \cdot 10^{-19}$
10,4	8,9	$9,62 \cdot 10^{-5}$	$1,1 \cdot 10^{-4}$	$6,05 \cdot 10^{-7}$	$6,1 \cdot 10^{-19}$
9,6	8,4	$1,0 \cdot 10^{-4}$	$1,2 \cdot 10^{-4}$	$6,3 \cdot 10^{-7}$	$6,8 \cdot 10^{-19}$
10,0	9,5	$1,00 \cdot 10^{-4}$	$1,1 \cdot 10^{-4}$	$6,17 \cdot 10^{-7}$	$6,1 \cdot 10^{-19}$
10,1	8,8	$9,90 \cdot 10^{-5}$	$1,1 \cdot 10^{-4}$	$6,14 \cdot 10^{-7}$	$6,3 \cdot 10^{-19}$
9,4	9,0	$1,1 \cdot 10^{-4}$	$1,1 \cdot 10^{-4}$	$6,4 \cdot 10^{-7}$	$6,7 \cdot 10^{-19}$

Tabuľka 5.4: Výsledky pre štvrtú kvapku. Stredná kvadratická chyba aritmetického priemeru ΔQ pre štvrtú kvapku má hodnotu $8,7 \cdot 10^{-21}$ C. Náboj tejto kvapky leží v intervale $(6,45 \pm 0,09) \cdot 10^{-19}$ C.

i	Q_i (C)	Q_i/Q_1
1	$1,60 \cdot 10^{-19}$	1,00
2	$3,22 \cdot 10^{-19}$	2,01
3	$4,81 \cdot 10^{-19}$	3,00
4	$6,45 \cdot 10^{-19}$	4,03

Tabuľka 5.5: Náboje meraných kvapiek ako približne celočíselné násobky náboja kvapky s najmenším nábojom. Index i predstavuje poradové číslo meranej kvapky.

i	$e_i = Q_i/i$	$\Delta e_i = \Delta Q_i/i$
1	$1,60 \cdot 10^{-19}$ C	$0,04 \cdot 10^{-19}$ C
2	$1,61 \cdot 10^{-19}$ C	$0,03 \cdot 10^{-19}$ C
3	$1,60 \cdot 10^{-19}$ C	$0,03 \cdot 10^{-19}$ C
4	$1,61 \cdot 10^{-19}$ C	$0,02 \cdot 10^{-19}$ C

Tabuľka 5.6: Odhady hodnoty elementárneho náboja a jeho odchýlky pre merané kvapky.

Z výsledkov v Tabuľke 5.6 možno odhadnúť hodnotu elementárneho náboja a jeho odchýlky. Hodnotu e určíme ako aritmetický priemer hodnôt nábojov e_i získaných pre každú kvapku. Odchýlku Δe určíme ako aritmetický priemer odchýlok v Tabuľke 5.6.

Pre naše hodnoty sme získali odhad elementárneho náboja

$$e = (1,61 \pm 0,03) \cdot 10^{-19} \text{ C},$$

ktorý je vo vynikajúcej zhode s oficiálnou hodnotou.

Kapitola 6

Záver

Na záver zhrnieme, čo všetko sa nám v tejto práci podarilo dosiahnuť:

1. Z literatúry a z internetu sme získali informácie o histórii merania elementárneho náboja, o experimentálnej zostave a o používanom spôsobe merania (Kapitola 2).
2. Matematicky sme popísali pohyb nabitých olejových kvapôčok v priestore medzi doskami kondenzátora, keď na ne nepôsobí aj keď na ne pôsobí elektrická sila. Uvážili sme aj Brownov pohyb kvapôčok, ktorý vykonávajú vďaka nepravidelným nárazom od molekúl vzduchu (Kapitola 3).
3. Vytvorili sme Java applet predstavujúci počítačový model Millikanovho pokusu, ktorý modeluje pohyb nabitých kvapôčok a umožňuje vykonať virtuálne meranie elementárneho náboja, pričom počíta aj s Brownovým pohybom kvapôčok (Kapitola 4).
4. Na Java applete sme vykonali meranie hodnoty elementárneho náboja tak, že sme preskúmali pohyb štyroch kvapiek s rôznymi nábojmi. Došli sme k výsledku $e = (1,61 \pm 0,03) \cdot 10^{-19} \text{ C}$, ktorý sa veľmi dobre zhoduje s tabuľkovou hodnotou elementárneho náboja (Kapitola 5).

Splnili sme všetky ciele, ktoré sme si stanovili v úvode.

Vzhľadom na to, že jednou z cieľových požiadaviek kladených na maturantov z fyziky na úrovni A je meranie elementárneho náboja pomocou

Millikanovho pokusu, bude mať náš Java applet pravdepodobne aj praktické využitie pre budúcich maturantov, ktorí budú mať na našom virtuálnom modeli pokusu uskutočniť meranie a potom spracovať výsledky.

Táto práca mala pre nás veľký prínos, pretože Millikanova konštanta, udávajúca veľkosť elementárneho náboja, už pre nás neznamena len akési číslo, ktoré sa ani netreba učiť naspamäť, lebo je v tabuľkách. Uvedomili sme si, že za týmto číslom sa skrýva veľa úsilia a ľudského umu schopného aplikovať fyzikálne poznatky v praxi na získavanie dôležitých informácií o reálnom svete.

Literatúra

- [1] Johnosn, G.: *Here They Are, Science's 10 Most Beautiful Experiments*. In: *The New York Times*, 24. september 2002. Vid' tiež <http://physics.nad.ru/Physics/English/top_ref.htm>.
- [2] *Měření náboje elektronu Millikanovou metodou*. Študijný materiál k základnému fyzikálnemu praktiku IV na Matematicko-fyzikálnej fakulte UK [online]. [cit. 2005-02-15]. Dostupné na <http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/txt_412.pdf>.
- [3] *Millikan oil drop experiment* [online]. [cit. 2005-02-15]. Dostupné na <<http://www.britannica.com/nobel/cap/omillik001a4.html>>.
- [4] Haw, M.: *Einstein's random walk*. In. *Physics World*, január 2005, č. 1, s. 19-22.
- [5] Feynman, R., Leighton, R., Sands, M.: *Feynmanove prednášky z fyziky, 1. diel*. Bratislava: Alfa 1986, s. 111-119.
- [6] Feynman, R., Leighton, R., Sands, M.: *Feynmanove prednášky z fyziky, 2. diel*. Bratislava: Alfa 1986, s. 293-296.
- [7] Reif, F.: *Fundamentals of statistical and thermal physics*. New York: McGraw-Hill Book Company 1965, s. 560-567.
- [8] Karlsson, M.: *Millikan's oil drop experiment* [online]. [cit. 2005-02-15]. Dostupné na <<http://www.edu.falkenberg.se/gymnasieskolan/fysik/elektron/millikaneng.html>>.

- [9] Gross, K.: *Millikan Versuch* [online]. [cit. 2005-02-15]. Dostupné na <<http://www.goethe.lb.bw.schule.de/physik/physik-12/0282-millikan-applet-2/>>.
- [10] Chapman, S. J.: *Java for engineers and scientists*. Upper Saddle River NJ: Prentice-Hall 2000, s. 211. Vid' tiež online materiál [cit. 2005-02-15] <<http://www.taygeta.com/random/gaussian.html>>.
- [11] Christian, W. et. al.: *Open Source Physics Project* [online]. [cit. 2005-02-15]. Stránky projektu, z ktorých sa dajú stiahnuť knižnice Open Source Physics dostupné na <<http://www.opensourcephysics.org>>.

Zoznam príloh

1. CD na ktorom je učebný materiál vo forme webovej stránky s Java appletom modelujúcim Millikanov pokus. Na CD sa nachádza aj zdrojový kód appletu.